PSI **Janvier 2024**
MATHEMATIQUES

Feuille d'Exercices
Espaces probabilisés

1 Ensembles dénombrables

Exercice 1. : Montrer que l'ensemble des entiers pairs puis celui des entiers impairs sont dénombrables.

Exercice 2. : Soit $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, c'est-à-dire l'ensemble des suites dont les termes sont soit 0, soit 1.

Supposons qu'il existe une bijection f entre $\mathbb{N}$ et Ω.

Soit $n \in \mathbb{N}$. $f(n)$ est une suite d'éléments de 0 et 1. On note $(f(n))_n$ son $n^{\text{ième}}$ terme. On définit alors la suite $(\omega_n)_n$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \omega_n = 1 - (f(n))_n$$

En considérant l'antécédent de $(\omega_n)_n$ par f, obtenir une contradiction. Qu'en déduit-on alors ?

2 Définition d'une probabilité et premiers calculs de probabilité

Exercice 3. : Soit $(x_n)_n$ une suite de réels satisfaisant la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 4x_{n+2} - 5x_{n+1} + x_n = 0$$

Soit Ω un ensemble dénombrable, noté $\Omega = \{\omega_n / n \in \mathbb{N}\}$.
Existe-t-il une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = P(\{\omega_n\})$?

Exercice 4. : Soit $N \leq 365$. Dans une assemblée de N personnes, quelle est la probabilité pour qu'au moins deux personnes soient nées le même jour ? On suppose qu'aucune n'est née le 29 février.

Exercice 5. On dispose de 5 paires de chaussettes que l'on range au hasard dans 3 tiroirs (chaque tiroir peut contenir plusieurs paires). Quelle est la probabilité qu'un tiroir au moins est vide ?

Exercice 6. Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable. Écrire avec les opérations ensemblistes ($\cap, \cup$ et complémentaire) les événements suivants :

1. L'un au moins des événements A, B ou C est réalisé.
2. L'un et seulement l'un des événements A, B est réalisé.
3. Les deux événements A et B sont réalisés mais C ne l'est pas.
4. Tous les événements $A_n, n \geq 1$ sont réalisés.
5. Une infinité d'événements parmi les $A_n, n \geq 1$ sont réalisés.
6. Seul un nombre fini des événements $A_n, n \geq 1$ est réalisé.
7. Une infinité d'événements parmi les $A_n, n \geq 1$ ne sont pas réalisés.
8. Tous les événements $A_n, n \geq 1$ sont réalisés à partir d'un certain rang.

Exercice 7. : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la probabilité de tirer l'entier n comme étant égale à $\frac{1}{2^n}$.

1. Montrer qu'on a ainsi défini une probabilité.
2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On note A_k l'évènement « L'entier n tiré est un multiple de k ». Exprimer $P(A_k)$ en fonction de k
3. Calculer $P(A_2 \cup A_3)$

Exercice 8. Soient $s > 1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Pour quelle valeur de λ peut-on définir une probabilité sur $(\mathbb{N}^*, \mathscr{P}(\mathbb{N}^*))$ en posant $\mathbb{P}(\{n\}) = \frac{\lambda}{n^s}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$?
2. Soient $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Quelle est la probabilité que « m soit un multiple de n »

3 Utiliser la continuité monotone

Exercice 9. Deux joueurs s'affrontent au tir à l'arc, le premier qui touche la cible a gagné. Le premier joueur a une probabilité $p_1 > 0$ de toucher la cible et le second une probabilité $p_2 > 0$. On suppose les tirs indépendants, montrer qu'il est presque sûr que le jeu s'arrête.

Exercice 10. On lance infiniment une pièce équilibrée. Quelle est la probabilité d'apparition de la séquence (pile,pile,face) ?

4 Formule des Probabilités composées

Exercice 11. Une urne contient une boule blanche et une boule noire. On tire une boule au hasard, et on la remet dans l'urne en ajoutant deux boules de la même couleur.

1. Quelle est la probabilité que les n premières boules tirées soient noires ?
2. Quelle est la probabilité de tirer indéfiniment des boules noires ?
3. Le résultat de la question précédente reste-t-il vrai si on remet la boule en ajoutant trois boules de la même couleur ?

Exercice 12. Trois joueurs A, B, C s'affrontent à un jeu aléatoire suivant les règles suivantes :

Ţ à chaque partie deux joueurs s'affrontent et chacun peut gagner avec la même probabilité.
Ţ le gagnant de la partie précédente et le joueur n'ayant pas participé s'affrontent à la partie suivante.
Ţ Est déclaré vainqueur celui qui gagne deux parties consécutives.

1. Établir que le jeu s'arrête presque sûrement.
2. A et B s'affrontent en premier. Quelle est la probabilité de gain de chaque joueur ?

5 Formule des probas totales

Exercice 13. : Jeanne et Paul s'entraînent au tir à l'arc. Jeanne atteint la cible 9 fois sur 10 et Paul 6 fois sur 9. Paul joue deux fois sur trois. Quelle est la probabilité que la cible soit atteinte ?

Exercice 14. : L'information »Elvis Presley est encore en vie « est transmise de proche en proche parmi n personnes de la personne 1 à la personne n. Chaque personne i de cette chaîne humaine transmet l'info reçue avec une proba p et l'info contraire avec la proba 1-p. On souhaite déterminer la proba p_n que la personne n reçoive l'info »Elvis Preslez est encore en vie «

1. Déterminer p_1, p_2, p_3(faire un arbre)
2. Déterminer p_{n+1} en fonction de p_n
3. En déduire $\underset{n\to+\infty}{lim}\ p_n$.

Exercice 15. : On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires.
L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.
On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes :
on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.
On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.
Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1.
Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2.
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « la boule tirée au $n^{\text{ième}}$ tirage est blanche ».
On pose également $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = P(B_n)$.

1. Calculer p_1.
2. Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}p_n + \dfrac{4}{7}$.
3. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n.

Exercice 16. Un(e) élève de PSI, conscient(e) de l'enjeu de travailler régulièrement toutes les matières décide d'une stratégie pour répartir le gros de ses heures de travail personnel, entre les matières scientifiques P, S et M.

A l'instant $t = 0$ correspondant au jour de la rentrée de septembre, le dernier cours qu'il a travaillé une heure durant est le cours P.
Quand il a travaillé une heure une matière, il consacre l'heure suivante avec équiprobabilité à l'une des deux autres matières.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
On note P_n l'événement « l'élève étudie la matière P au cours de sa n-ième heure de travail personnel » .
On note S_n l'événement « l'élève étudie la matière S au cours de sa n-ième heure de travail personnel » .
On note M_n l'événement « l'élève étudie la matière M au cours de sa n-ième heure de travail personnel » .
On pose $P(P_n) = p_n$, $P(S_n) = s_n$ et $P(M_n) = m_n$.

1. (a) En justifiant avec précision, montrer que
$$p_{n+1} = \frac{1}{2}s_n + \frac{1}{2}m_n$$
   (b) Exprimer, de même, s_{n+1} et m_{n+1} en fonction de p_n , s_n et m_n .
2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$
   (a) Déterminer les valeurs propres de A.
   (b) Déterminer les sous-espaces propres de A.
   (c) A est-elle diagonalisable ?
   (d) Sans calcul supplémentaire, justifier qu'il existe une matrice Q inversible dont on précisera les colonnes, et qu'il existe une matrice diagonale $D \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ dont on précisera les coefficients diagonaux telles que :
$$D = Q^{-1}AQ$$
   Remarque : Le calcul de Q^{-1} n'est pas demandé.
3. Montrer comment les résultats de la question 2. peuvent être utilisés pour calculer p_n, s_n et m_n en fonction de n et du vecteur $X_0 = (1, 0, 0)$.
4. Que vaut $p_n + s_n + m_n$, quel que soit $n \in \mathbb{N}$?
5. Exprimer A^n à l'aide de Q, Q^{-1} et D^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
6. En déduire l'expression de p_n, s_n, m_n en fonction de n.
7. Application numérique : le minimum raisonnable étant de $20h/semaine$, au bout de 30 semaines de préparation aux écrits, que vaudront p_n, s_n, m_n ?
8. Que dire de $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$, $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} m_n$?
   Quelle hypothèse du départ, faut-il modifier pour avoir un résultat différent ?

Exercice 17. On effectue une suite de lancers d'une pièce équilibrée. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on désigne par p_k la probabilité qu'au cours des k premiers lancers, le résultat Pile n'ait pas été obtenu trois fois de suite.

1. Calculer p_1, p_2, p_3. Dans la suite, on pose $p_0 = 1$. Montrer que,
$$\forall k \geq 3,\ p_k = \frac{1}{2}p_{k-1} + \frac{1}{4}p_{k-2} + \frac{1}{8}p_{k-3}$$
2. Déterminer p_k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
3. Etudier la convergence et la limite de la suite $(p_k)_k$. En déduire, en citant la propriété utilisée, que l'évènement « une suite de trois piles apparaîtra dans la suite de lancers »est presque sûr.

Exercice 18. Deux joueurs s'affrontent lors d'une succession de parties de pile ou face. Ils possèdent initialement un montant a et b respectivement et à chaque victoire le perdant donne un euro au gagnant. Le joueur A a une probabilité p de gagner à chaque lancer. Le jeu s'arrête lorsqu'un joueur n'a plus d'argent.
On pose $N = a + b, q = 1 - p$ et pour $n \in \{0, \cdots, N\}$, on note p_n (respectivement q_n) la probabilité que le joueur A (resp : B) finisse ruiné s'il commence avec n euros.

1. Montrer que si $0 < a < N, p_a = pp_{a+1} + qp_{a-1}$.
2. En déduire l'expression de p_a.
3. Calculer de même q_a puis $p_a + q_a$. Que peut-on en déduire ?

6 Formule de Bayes

Exercice 19. : On considère deux urnes indiscernables. L'une contient 10 boules noires et 30 boules blanches, l'autre 20 boules noires et 20 boules blanches (mais on ne sait laquelle est laquelle). On tire une boule dans l'une des deux urnes. Elle est blanche. Quelle est la probabilité qu'elle vienne de l'urne déséquilibrée ?

Exercice 20. : On cherche un objet dans un meuble comportant 7 tiroirs. La probabilité qu'il soit dans le meuble est p. Sachant que les 6 premiers tiroirs ont été ouverts sans succès, quelle est la probabilité que l'objet soit dans le septième ?