4/10

On a donc $rg(\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}, \vec{y}) = 4$ et alors $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}, \vec{y})$ est génératrice de $\mathbb{R}^4$. On a donc $\dim(E+F) = 4$ et $\dim(E \cap F) = 0$.

Ex 5

- $\dim E = 2$ (E est le plan vectoriel orthogonal à $(1,-2,3)$)
- $F = \mathrm{Vect}\left((1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})\right)$ donc $\dim F = 1$.
- G est un SEV de $\mathbb{K}_4[X]$ et donc $\dim G \in [\![0;5]\!]$
  - $X \notin G$ donc $G \neq \mathbb{K}_4[X]$ et $\dim G < 5$
  - $X-1 \in G$ donc $G \neq \{0\}$ et $\dim G > 0$.
  - $((X-1), (X-1)^2, (X-1)^3, (X-1)^4)$ est une famille "incluse" dans G. Elle est libre car elle échelonnée. On a donc $\mathrm{Vect}((X-1)^i, i \in [\![1;4]\!])$ qui est un SEV de G qui a pour dimension 4 donc $\dim G \geq 4$. Or $\dim G < 5$ donc $\dim G = 4$.

Ex 6

a) $$\underbrace{\mathrm{Vect}\left((X-2)(X-3), (X-2)^2(X-3), (X-2)^3(X-3)\right)}_{\dim = 3 \text{ (famille libre car échelonnée)}} \subset E \subset \underbrace{\mathbb{R}_4[X]}_{\dim = 5}$$

donc $\dim E = 3, 4$ ou 5 (*)

↳ facile à exclure car $E \neq \mathbb{R}_4[X]$

Or $\mathbb{R}_1[X] \cap E = \{0\}$ donc $\mathbb{R}_1[X]$ et E sont en somme directe et $\dim(\mathbb{R}_1[X] + E) = \dim \mathbb{R}_1[X] + \dim E = 2 + \dim E$.

Mais $\mathbb{R}_1[X] + E \subset \mathbb{R}_4[X]$ donc $\dim E + 2 \leq 5$ (**)

(*) et (**) permettent de conclure que $\dim E = 3$.

$\left((X-\pi)^i\right)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une famille libre, infinie, incluse dans F,

F est donc un sous-espace de $\mathbb{R}[X]$ de dimension infinie.

b) Soit $n>0$. S_n est l'ensemble des matrices symétriques de taille n.

La famille $(E_{11}, E_{22}, \dots, E_{nn}, E_{12}+E_{21}, E_{13}+E_{31}, \dots, E_{n-1,n}+E_{n,n-1})$ est une base de S_n, on en déduit $\dim S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

On sait que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = A_n \oplus S_n$ ce qui entraîne

$\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})) = \dim A_n + \dim S_n \iff \dim(A_n) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2}$

$\iff \dim A_n = \frac{n(n-1)}{2}$

c) • Montrons que $(\cos, \cos^2, \cos^3)$ est libre.

Soit (α, β, γ) tel que $\alpha\cos + \beta\cos^2 + \gamma\cos^3 = 0$

Pour $x=0$, il vient $\alpha+\beta+\gamma=0$

Pour $x=\pi$, il vient $-\alpha+\beta-\gamma=0$

Pour $x=\frac{\pi}{3}$, il vient $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{4}+\frac{\gamma}{8}=0$

La matrice du système est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{8} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

le système admet donc une unique solution qui est $(0,0,0)$, la famille $(\cos, \cos^2, \cos^3)$ est donc libre et $\dim E = 3$.

• $\mathcal{P} \supset \{x \mapsto x^{2i}, i \in \mathbb{N}\}$.

Or, $\mathrm{Vect}(x \mapsto x^{2i}, i\in\mathbb{N})$ est l'ens. des polynômes qui n'ont que des monômes

de degrés pairs est un SEV de dimension infinie, ce qui entraîne 6/10
que P est un espace de dimension infinie.

d) $E = \text{Vect}\left((2^n)_n , ((-1)^n)_n \right)$ donc E est un plan de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Ex 7 $\left((X-i)^i\right)_{i \in [\![0;n]\!]}$ est une famille libre (car échelonnée) de $n+1$ vecteurs dans un espace de dimension $n+1$; c'est est donc une base.

Ex 8

$$f \circ f = f$$
$$f \circ g = g \circ f = g$$
$$g \circ g = x \longmapsto x^4$$

On a donc $\text{Vect}(f, g, f\circ f, f \circ g, g \circ f, g \circ g) = \text{Vect}(f, g, x \longmapsto x^4)$

Dans $\mathbb{K}[X]$, (X, X^2, X^4) est libre donc $(f, g, x \longmapsto x^4)$ est libre et $\dim \text{Vect}(f, g, x \longmapsto x^4) = 3$.

Ex 9 $E = \text{Vect}\Bigg(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathcal{F}}\Bigg)$

$\mathcal{F}$ est clairement libre donc $\dim(E) = \# \mathcal{F} = 3$.

Ex 10 Th de la base incomplète : E un EV de dim finie
$(\vec{x}_1, .. \vec{x}_n)$ une famille libre
$\exists (\vec{x}_{n+1}, \dots \vec{x}_p) \in E^{n-p}$ t.q.
$(\vec{x}_i)_{i \in [\![1;p]\!]}$ est une base de E