PSI **Mars 2023**
MATHEMATIQUES

Feuille d'Exercices
Espaces vectoriels normés

Exercice 1. Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ et $p+1$ réels $(x_0, x_1, \cdots, x_p)$ distincts deux à deux.

On note $E = \mathbb{R}_n[X]$, et on pose, pour $Q \in E, N(Q) = \sum_{k=0}^{p} |Q(x_k)|$.

Donner une CNS pour que N soit une norme sur E.

Exercice 2. Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$. On note $N(f) = \sqrt{f(0)^2 + \int_0^1 (f'(t))^2 \, \mathrm{d}t}$.

1. Montrer que N est une norme .
2. Montrer que, $\forall f \in E,\ \|f\|_\infty \leq \sqrt{2} N(f)$ *Indication écrire* $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt$.
3. Montrer que les normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 3.
1. Montrer que l'application définie par $N(A) = \sqrt{tr({}^tAA)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$ est une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $N(AB) \leq N(A)N(B)$ pour tous A et B.
3. Caractériser les couples (A, B) pour lesquels : $N(AB) = N(A)N(B)$.
4. Soit N' une autre norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que :

$$\forall (A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^2,\ N'(AB) \leq c\, N'(A)N'(B)$$

Exercice 4. Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. On pose $N_1(f) = \operatorname*{Sup}_{x \in [0,1]} |f(x)|$ et $N_2(f) = \int_0^1 e^x |f(x)| dx$.

1. Démontrer que N_1 et N_2 sont des normes.
2. Trouver k tel que $\forall f \in E,\ N_2(f) \leq k N_1(f)$.
3. On considère f_n : $f_n(x) = 1 - nx$ si $0 \leq x \leq \frac{1}{n}$ et $f_n(x) = 0$ sinon. Les f_n sont-elles dans E ? Etudier les limites de (f_n) dans (E, N_1) et (E, N_2).
4. Les normes sont-elles équivalentes ?.

Exercice 5. Trouver la limite de la suite $(A_n)_{n \geq 1}$ où $B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & 1 \end{pmatrix}$ et $A_n = B^n$.

Exercice 6. On note $A = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} A^n$.

Exercice 7. On note $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et la diagonaliser.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p)!} A^{2p}$.

Exercice 8. Soit $E = \mathbb{R}[X]$.

Pour $P \in E/\{0\}$, en écrivant $P = \sum\limits_{i=0}^{deg(P)} a_i X^i$, on pose $\|P\| = \underset{0 \leq i \leq deg(P)}{\text{Sup}} |a_i|$ et $\|0\| = 0$.

On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} X^i$.

1. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur E.
2. Calculer $\|P_n\|$. En déduire que la suite $(P_n)_n$ ne converge pas vers 0 au sens de $\|\cdot\|$.
3. Soit $P \in E$ de degré d. Montrer que, pour tout $n \geq d+1$, on a $\|P_n - P\| \geq \dfrac{1}{d+1}$. En déduire que la suite $(P_n)_n$ est divergente au sens de $\|\cdot\|$.

Exercice 9. (Extrait Problème CCP) Pour toute matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\operatorname{Sp} A$ l'ensemble des valeurs propres complexes de A et on appelle rayon spectral de A le réel $\rho(A)$ défini par :

$$\rho(A) = \underset{\lambda \in \operatorname{Sp} A}{max} |\lambda|.$$

On qualifie de norme matricielle toute norme φ définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant la propriété :

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_{n(\mathbb{K})})^2, \varphi(AB) \leq \varphi(A) \cdot \varphi(B).$$

1. Soit $S = (s_{i,j})$ et $T = (t_{i,j})$ deux matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   (a) Montrer que ST est une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont $s_{1,1}t_{1,1}$, $s_{2,2}t_{2,2}$, $\ldots$, $s_{n,n}t_{n,n}$.
   (b) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, quels sont les éléments diagonaux de T^k ?
2. Montrer que pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\rho\left(A^k\right) = [\rho(A)]^k$.
3. Montrer que l'application $\psi : \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}, A = (a_{i,j}) \mapsto \underset{1 \leq i,j \leq n}{max} |a_{i,j}|$ est une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, mais n'est pas en général une norme matricielle sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
4. En admettant l'existence de normes matricielles sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que pour toute norme N définie sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une constante C réelle positive telle que :

$$\forall (A, B) \in \left(\mathscr{M}_n(\mathbb{C})\right)^2, N(AB) \leq C N(A) N(B).$$

5. Soit $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $P \in GL_n(\mathbb{C})$. Montrer que la suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers A si et seulement si la suite $\left(P^{-1}AP\right)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $P^{-1}AP$.
6. (a) Soit $T = \begin{pmatrix} lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ un élément de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer T^k et en déduire que la suite $\left(T^k\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge si et seulement si $(|\lambda| < 1)$ ou $(\lambda = 1$ et $\mu = 0)$.
   (b) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ diagonalisable. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les valeurs propres de A pour que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ soit convergente.
   (c) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ non diagonalisable. Montrer que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si $\rho(A) < 1$. Dans ce cas, préciser $\lim\limits_{k \to \infty} A^k$.
   (d) Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\rho(A)$ pour que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle.