PSI **Mars 2024**
MATHEMATIQUES

Feuille d'Exercices
Espaces vectoriels normés

Exercice 1. Soit $(E, \|.\|)$ un evn . Montrer que, $\forall (x,y) \in E^2$,

$$\|x\| + \|y\| \leqslant \|x-y\| + \|x+y\|$$

Exercice 2. L'application f de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ qui à A associe le maximum des modules des racines de son polynôme caractéristique est-elle une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$?

Exercice 3. Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} &= \frac{1}{6}u_n + \frac{1}{3}v_n + \frac{1}{2} \\ v_{n+1} &= \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3}v_n - \frac{1}{3} \end{cases}$$

On posera pour $n \in \mathbb{N}, X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ et pour $C = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\|C\|_\infty = Max(|a|,|b|)$.

1. Montrer que $\|.\|_\infty$ est une norme sur $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.
2. Trouver une matrice carrée A et une matrice colonne B telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n + B$.
3. Déterminer l'unique matrice L telle que $L = AL + B$.
4. Montrer que pour toute colonne X, on a $\|AX\|_\infty \leqslant \frac{5}{6}\|X\|_\infty$.
5. Montrer que :$\forall n \in \mathbb{N}, \|X_n - L\|_\infty \leqslant \left(\frac{5}{6}\right)^n \|X_0 - L\|_\infty$
6. En déduire la convergence des suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ vers des limites à calculer.

Exercice 4.

1. Montrer que l'application définie par $N(A) = \sqrt{tr({}^tAA)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$ est une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $N(AB) \leq N(A)N(B)$ pour tous A et B.
3. Caractériser les couples (A,B) pour lesquels : $N(AB) = N(A)N(B)$.
4. Soit N' une autre norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que :

$$\forall (A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^2,\ N'(AB) \leq c\,N'(A)N'(B)$$

Exercice 5. Pour tout $P = \sum\limits_{k=0}^{deg(P)} p_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, on pose : $\|P\| = \sum\limits_{k=0}^{deg(P)} |p_k|$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}X^k$.

1. Montrer que $\|.\|$ est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Par un raisonnement par l'absurde, montrer que la suite $(P_n)_n$ ne converge pas dans $(\mathbb{R}[X], \|.\|)$.

Exercice 6. On munit $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ de la norme $\|(m_{i,j})_{i,j}\| = \underset{(i,j)\in\{1,..,p\}^2}{Max} |m_{i,j}|$.

1. Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ telle que la suite $(\|A^n\|)_n$ soit bornée.
   Montrer que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de A, alors $|\lambda| \leq 1$.

2. Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ telle que la suite $(A^n)_n$ converge vers B.
   Montrer que B est la matrice d'un projecteur et en déduire que

$$Sp(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}/|\lambda| < 1 \text{ ou } \lambda = 1\}$$

Exercice 7. Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. On pose $N_1(f) = \underset{x\in[0,1]}{\text{Sup}} |f(x)|$ et $N_2(f) = \int_0^1 e^x |f(x)| dx$.

1. Démontrer que N_1 et N_2 sont des normes.
2. Trouver k tel que $\forall f \in E,\ N_2(f) \leq k N_1(f)$.
3. On considère $f_n : f_n(x) = 1 - nx$ si $0 \leq x \leq \frac{1}{n}$ et $f_n(x) = 0$ sinon. Les f_n sont-elles dans E ? Etudier les limites de (f_n) dans (E, N_1) et (E, N_2).
4. Les normes sont-elles équivalentes ?.

Exercice 8. (CCINP 2023)
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\|A\| = \underset{1\leq i\leq n}{max} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$ et $\rho(A) = \underset{\lambda \in \text{Sp } A}{max} |\lambda|$.

1. Déterminer $\|A\|$ et $\rho(A)$ quand $A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}$ et lorsque
2. Montrer que $\forall (A,B) \in (\mathcal{M}_{n(\mathbb{K})})^2, \|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.
3. (a) Soit X un vecteur propre associé à la valeur propre λ . . Montrer que : $\forall i \in [\![1,n]\!], |\lambda x_i| \leqslant \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij} x_j|$
   (b) En déduire que $\rho(A) \leqslant \|A\|$.
   (c) Montrer que la suite $(A^k)_k$ converge vers la matrice nulle dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ si et seulement si $\rho(A) < 1$.

Exercice 9. On note $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et la diagonaliser.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p)!} A^{2p}$.

Exercice 10. (Mines 2023) Soit $E = C([0,1], \mathbb{C})$ et φ endomorphisme de E défini par : $\forall f \in E, \forall x \in [0,1], \varphi(f)(x) = \int_0^x t f(t)\, dt$.

1. Trouver le plus petit entier k tel que $\|\varphi(f)\|_1 \leqslant k \|f\|_1$.
2. Trouver le plus petit entier k tel que $\|\varphi(f)\|_\infty \leqslant k \|f\|_\infty$.

Exercice 11. (Centrale PC 2023) Pour tout polynôme réel P et tout entier n , on pose $a_n(P) = \int_0^1 t^n P(t)\, dt$.
.

Pour tout polynôme réel P, , on pose $\|P\|_\infty = \underset{t\in[0,1]}{Sup} |P(t)|$, $N_\infty(P) = \underset{n\in\mathbb{N}}{Sup} |a_n(P)|$, $N_2(P) = \sqrt{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (a_n(P))^2}$.

1. Justifier que ces quantités sont bien définies.
2. Montrer qu'elles définissent des normes sur $\mathbb{R}[X]$.
3. Trouver des constantes α et β strictement positives telles que $\forall P \in \mathbb{R}[X], N_\infty(P) \leq \alpha N_2(P)$ et $N_2(P) \leq \alpha \|P\|_\infty$
4. Montrer que ces normes ne sont pas équivalentes entre elles.