Chap 19 : EV de dimensions finies - Exercices

1/10

VF : V, F, V, V, F, F, V, F, V, V

Ex 1

a) $\vec{x}$ et $\vec{y}$ ne sont pas colinéaires, $(\vec{x}, \vec{y})$ est donc libre.
Par définition, $(\vec{x}, \vec{y})$ est génératrice de E, c'est donc une base de E et $\dim E = 2$

b) $(1,-3,-2) = -\vec{x}+\vec{y}$ et $(1,5,8) = 3\vec{x}-\vec{y}$
On a donc $\mathrm{Vect}((1,-3,-2),(1,5,8)) \subset \mathrm{Vect}(\vec{x},\vec{y}) = E$.
Or $(1,-3,-2)$ et $(1,5,8)$ ne sont pas colinéaires et donc $\dim(\mathrm{Vect}((1,-3,-2),(1,5,8))) = 2 = \dim E$.
$\mathrm{Vect}((1,-3,-2),(1,5,8))$ est donc un SEV de E ayant la même dimension que E, on en déduit $\mathrm{Vect}((1,-3,2),(1,5,8)) = E$

c) On a déjà $(\vec{x}, \vec{y})$ et $((1,-3,-2),(1,5,8))$.
On peut aussi prendre $(\vec{x}+\vec{y}, \vec{x}-\vec{y})$.

d) $\dim E = 2$ et on travaille dans $\mathbb{R}^3$ dont la dimension est 3.
les supplémentaires de E ont pour dimension 1.

e) Toute droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ qui n'est pas incluse dans E est un supplémentaire de E. Il suffit donc de trouver $\vec{u} \notin E$ et de prendre $\mathrm{Vect}(\vec{u})$ pour avoir un supplémentaire.
$\vec{u}_1 = (1,0,0)$ convient. On peut également prendre $\vec{u}_2 = \vec{x} \wedge \vec{y}$.

Ex 2

a) Soit A, la matrice dont les colonnes sont $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ et $\vec{t}$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \underset{L}{\overset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{t}) = 3$ donc $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{t})$ est génératrice de $\mathbb{K}^3$