# Feuille 15 : Systèmes différentiels linéaires

**Exercice 1 :** Résoudre les systèmes différentiels suivants (on donnera les solutions à valeurs réelles) :

1) $\begin{cases} x' = -7x - 6y + t \\ y' = 12x + 10y \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x' = -7x + y \\ y' = -2x - 5y \end{cases}$

3) $\begin{cases} x' = y - z \\ y' = z - x \\ z' = x - y \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x' = x + 2y - z + 2t \\ y' = 2x + 4y - 2z + t \\ z' = -x - 2y + z \end{cases}$

5) $\begin{cases} x' = 3x + y - z \\ y' = x + y + z \\ z' = 2x + 2z \end{cases}$ On montrera que la matrice $A$ du système est semblable à $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Il faut étudier les matrices
$\begin{pmatrix} -7 & -6 \\ 12 & 10 \end{pmatrix}$ (vp 2 et 1), $\begin{pmatrix} -7 & 1 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$ (vp $i-6$ et $-i-6$), $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ (vp 0, $i\sqrt{3}$ et $-i\sqrt{3}$), $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ (vp 0 de multiplicité 2 et 6, diagonalisable), $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (vp triple 2, non diagonalisable).
Par exemple dans le second cas, on diagonalise la matrice :

$$\begin{pmatrix} -7 & 1 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6-i & 0 \\ 0 & -6+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & \frac{1}{4}+\frac{i}{4} \\ \frac{i}{2} & \frac{1}{4}-\frac{i}{4} \end{pmatrix}.$$

On a maintenant deux possibilités :
1) On résout le système
$\begin{cases} x_1' = (-6-i)x_1 \\ y_1' = (-6+i)y_1 \end{cases}$ dont les solutions sont $\{(t \mapsto \lambda e^{(-6-i)t}, t \mapsto \mu e^{(-6+i)t}) | (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\}$.
Les solutions du système donné par l'énoncé sont données par le produit $\begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$.

2) On trouve deux vecteurs propres $V_1 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 1-i \\ 2 \end{pmatrix}$ de la matrice, associés à leurs valeurs propres respectives $(-6-i)$ et $(-6+i)$. Alors les solutions du système différentiel linéaire sont les $\{\lambda e^{(-6-i)t} V_1 + \mu e^{(-6+i)t} V_2 | (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\}$

Ces solutions ont été trouvées à valeurs dans $\mathbb{C}$. Si on cherche des solutions à valeurs réelles, on prend une solution à valeurs complexes, dont on détermine la partie réelle et la partie imaginaire, par exemple :

$$e^{(-6-i)t} \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \end{pmatrix} = e^{-6t} e^{-it} \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \end{pmatrix} = e^{-6t} \begin{pmatrix} \cos(-t) - \sin(-t) \\ 2\cos(-t) \end{pmatrix} + ie^{-6t} \begin{pmatrix} \sin(-t) + \cos(-t) \\ 2\sin(-t) \end{pmatrix}$$

qu'on réécrit

$$e^{-6t} \begin{pmatrix} \cos(t) + \sin(t) \\ 2\cos(t) \end{pmatrix} + ie^{-6t} \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ -2\sin t \end{pmatrix}$$

Ces deux vecteurs forment une famille libre de cardinal 2 de solutions du système d'ordre 2, c'en est donc une base.

En ce qui concerne le dernier système, on suit l'indication de l'énoncé. Il faut d'abord trouver un vecteur propre associé à la valeur propre 2 (par exemple $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, qu'on note $X$), puis on résoud l'équation $AY = X + 2Y$ pour trouver un second vecteur, puis on résout $AZ = Y + 2Z$. On vérifie que la famille $(X, Y, Z)$ est libre, ce qui en fait une base de $M_{3,1}(\mathbb{R})$. On peut alors déterminer la matrice de passage $P$ de la base canonique à la nouvelle base, ainsi que son inverse, et on a une expression de $A$ en fonction de la matrice $T$ qui lui est semblable.
Le système que l'on doit alors résoudre est triangulaire : on doit résoudre ligne à ligne, en remontant.

Dernier point : lorsque le système n'est pas homogène, on a deux possibilités. Soit on trouve une solution particulière et on détermine l'ensemble des solutions du système homogène, soit on considère qu'on peut réécrire le système sous la forme $(P^{-1}X') = D(P^{-1}X) + (P^{-1}B)$, ce qui permet de se ramener à la résolution d'équations différentielles linéaires du premier ordre.

**Exercice 2 :** Résoudre l'équation différentielle : $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$.

Les solutions au système sont de la forme $X = ae^t(1,1,1)^T + be^{2t}(4,2,1)^T + ce^{3t}(9,3,1)^T$, (avec $X = (x, x', x'')^T$)) donc $y = ae^t + 4be^{2t} + 9ce^{3t}$

**Exercice 3 :** Soit $(E) : (x+1)y'' - 2y' + (1-x)y = xe^x$.
Vérifier que la fonction $x \mapsto e^x$ est solution de l'équation homogène puis résoudre l'équation $(E)$ sur $]-1, +\infty[$.

On se place sur $]-1; +\infty[$.

- **Résolution de l'équation homogène.**

On constate rapidement, en notant $f : x \to e^x$, que

$$(x+1)f'' - 2f' + (1-x)f = 0$$

Ainsi, $f$ est solution de l'équation homogène $(E_h)$ associée à $(E)$.
Utilisons alors la méthode de Lagrange. On note $y = z \times f$, où $z$ est une fonction deux fois dérivables. On a alors, après calcul :

$$y' = (z + z')e^x \text{ et } y'' = (z'' + 2z' + z)e^x$$

Ainsi, l'équation homogène $(E_h)$ est équivalente à :$(x+1)z'' + 2xz' = 0 \quad (E')$
L'équation s'écrit, sur $]-1; +\infty[$, $z'' + \dfrac{2x}{x+1}z' = 0$ soit, après résolution :

$$\exists\, \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall\, x \in ]-1; +\infty[, \quad z'(x) = \alpha e^{-2x + 2\ln(x+1)} = \alpha(x+1)^2 e^{-2x}$$

Par intégration par parties (un peu longue), on obtient alors que :

$$\exists\, \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall\, x \in ]-1; +\infty[, \quad z(x) = \alpha\left(-\frac{1}{2}(x+1)^2 - \frac{1}{2}(x+1) - \frac{1}{4}\right)e^{-2x} + \beta$$

Finalement, les solutions de l'équation homogènes $(E_h)$ sont

$$\boxed{\mathcal{S}_h = \left\{x \to \alpha\left(-\frac{1}{2}(x+1)^2 - \frac{1}{2}(x+1) - \frac{1}{4}\right)e^{-x} + \beta e^x, \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\right\}}$$

- **Solution particulière de** $(E)$

En cherchant une solution de $(E)$ de la forme $f : x \mapsto (ax+b)e^x$, on montre que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2}xe^x$ est une solution particulière de $(E)$.
**Bilan** : l'ensemble des solutions de $(E)$ est donc :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{x \to \alpha\left(-\frac{1}{2}(x+1)^2 - \frac{1}{2}(x+1) - \frac{1}{4}\right)e^{-x} + \beta e^x, \quad (\alpha, \beta) + \frac{1}{2}xe^x, \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\right\}}$$

**Exercice 4 :** Soit $(E) : x(x+1)y'' + (x+2)y' - y = 0$.
Montrer que, si $(E)$ admet une solution polynomiale $y_0$, celle-ci est de degré 1.
En déduire les solutions polynomiales de $(E)$.
Résoudre l'équation sur des intervalles bien choisis.
Rechercher les solutions maximales (i.e. définies sur un intervalle le plus grand possible).

1. Soit $y_0$ un polynôme de degré $n$. Notons alors, pour tout réel $x$, $y_0(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.

   On s'intéresse au terme en $x^n$ dans le membre de gauche. Celui de $x(x+1)y_0''$ est $n(n-1)x^n$, celui de $(x+2)y'$ est $nx^n$ et celui de $y$ est $x^n$. Pour que $y_0$ vérifie $(E)$ il faut nécessairement que le terme en $x^n$ de la somme soit nul, c'est-à-dire

   $$n(n-1) + n - 1 = 0 \Longleftrightarrow n^2 - 1 = 0$$

   $n$ étant un entier, cela implique $n = 1$ et $y_0$ est donc nécessairement de degré 1.

2. D'après la question précédente, une solution polynomiale de $(E)$ est nécessairement de degré 1. On écrit alors $y_0 : x \mapsto ax + b$ et on injecte dans $(E)$. On obtient :

   $$x(x+1) \times 0 + (x+2)a - (ax+b) = 0 \Longleftrightarrow 2a - b = 0$$

   Ainsi, les fonctions de la forme $x \mapsto a(x+2)$, avec $a \in \mathbb{R}$, qui sont effectivement solutions de $(E)$, sont toutes les solutions polynomiales de $E$.

3. On dispose d'une solution particulière : on va appliquer la méthode de Lagrange. On se place pour l'instant sur $\mathbb{R}$.

   On note, pour $x \in \mathbb{R}$, $y(x) = (x+2)z(x)$ avec $z$ une fonction deux fois dérivables. On a alors :

   $$y' = z + (x+2)z' \text{ et } y'' = 2z' + (x+2)z''$$

   $y$ est solution de $(E)$ si et seulement si (après calcul)

   $$x(x+1)(x+2)z'' + (3x^2 + 6x + 4)z' = 0.$$

   En se plaçant sur $\mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 0\}$, ceci s'écrit

   $$z'' + \frac{3x^2 + 6x + 4}{x(x+1)(x+2)} z' = 0$$

   En décomposant en éléments simples, cela s'écrit également

   $$z'' + \left( \frac{2}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2} \right) z' = 0$$

On peut résoudre sur chacun des quatre intervalles $I_1 = ]-\infty, -2[, I_2 = ]-2, -1[, I_3 = ]-1, 0[$ et $I_4 = ]0, +\infty[$ :

$$\forall\ i \in \{1,2,3,4\},\ \forall\ x \in I_i, \quad z' = \alpha e^{-2\ln(|x|)+\ln(|x+1|)-2\ln(|x+2|)} = \alpha \frac{|x+1|}{(x(x+2))^2}$$

- Sur $I_1$, $I_2$ et $I_3$ cela s'écrit $z' = \alpha \dfrac{-x-1}{(x(x+2))^2} = \alpha \left( \dfrac{1}{4(x+2)^2} - \dfrac{1}{4x^2} \right)$, et donne :

$$z = \alpha \left( -\frac{1}{4(x+2)} + \frac{1}{4x} \right) + \beta = \alpha \frac{1}{2x(x+2)} + \beta$$

  En revenant à la variable de départ, et en utilisant la contrainte de continuité et de continuité de la dérivée de la solution en $-2$ et en $-1$, on en déduit que les solutions s'écrivent

$$\boxed{\mathcal{S}_{I_{\{1,2,3\}}} = \left\{ x \to \frac{\alpha}{2x} + \beta(x+2), \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$$

- Sur $I_4$, cela s'écrit $z' = \alpha \dfrac{x+1}{(x(x+2))^2} = \alpha \left( \dfrac{1}{4x^2} - \dfrac{1}{4(x+2)^2} \right)$, et donne :

$$z = \alpha \left( \frac{1}{4(x+2)} - \frac{1}{4x} \right) + \beta = \alpha \frac{-1}{2x(x+2)} + \beta$$

  En revenant à la variable de départ, on en déduit que les solutions s'écrivent

$$\boxed{\mathcal{S}_{I_4} = \left\{ x \to \frac{-\alpha}{2x} + \beta(x+2), \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$$

4. Remarquons que les solutions sur n'importe quel intervalle sont en réalités définies sur $\mathbb{R}*$, et qu'elles sont solutions de $(E)$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Pour qu'elle admette au moins une limite en 0, il faut et il suffit que $\alpha = 0$. Ainsi. les seules solutions maximales (sur $\mathbb{R}$ ici) sont les $x \mapsto \beta(x+2)$, avec $\beta \in \mathbb{R}$.

**Exercice 5 :** On considère l'équation différentielle $(E) : x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$.
Chercher les solutions de $(E)$ développables en série entière. Résoudre $(E)$ sur chaque intervalle $]-\infty, 0[,\ ]0, 1[,\ ]1, +\infty[$.

**Exercice 6 :** Résoudre l'équation $(E) : x^2y'' + 3xy' + 5y = x^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ à l'aide du changement de variable $t = \ln x$, en posant $y(x) = z(t)$.
*Commencer par calculer $y'(x)$ et $y''(x)$ en fonction de $z$.*

On pose $y(x) = z(t) = z(\ln x)$, où $z$ est deux fois dérivables sur $\mathbb{R}^{+*}$ (remarquons que le changement de variable est légitime sur $\mathbb{R}^{+*}$, celui-ci étant deux fois dérivables et bijectif).
On a alors
$$y'(x) = \frac{1}{x}z'(\ln x) \text{ et } y''(x) = -\frac{1}{x^2}z'(\ln x) + \frac{1}{x^2}z''(\ln x)$$
Ainsi, l'équation $(E)$ est équivalente à (après calcul) $z''(t) + 2z'(t) + 5z(t) = e^{2t} \quad (E')$.
(avec $t = \ln x \Leftrightarrow x = e^t$).
L'équation $(E')$ est une équation différentielle linéaire à second membre, que l'on résout :

- **Equation homogène** : l'équation caractéristique est $X^2 + 2X + 5$, dont les racines sont $-1+2i$ et $-1-2i$. Les solutions de l'équation homogène sont donc
$$\mathcal{S}_{E'_h} = \left\{t \to e^{-t}\left(\alpha\cos(2t) + \beta\sin(2t)\right), \quad (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\right\}$$
- **Solution particulière** : 2 n'étant pas racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière de la forme $t \to ae^{2t}$. Après calcul, on trouve que $t \to \frac{1}{13}e^{2t}$ est solution particulière de $(E')$.

**Bilan** : les solutions de l'équation $(E')$ sont, d'après le principe de superposition :
$$\mathcal{S}_{E'} = \left\{t \to \frac{1}{13}e^{2t} + e^{-t}\left(\alpha\cos(2t) + \beta\sin(2t)\right), \quad (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\right\}$$
On revient à la variable de départ et les solutions de l'équation $(E)$ sont donc :
$$\mathcal{S}_E = \left\{x \to \frac{1}{13}e^{2\ln x} + e^{-\ln x}\left(\alpha\cos(2\ln x) + \beta\sin(2\ln x)\right), \quad (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\right\}$$
soit
$$\boxed{\mathcal{S}_E = \left\{x \to \frac{1}{13}x^2 + \frac{1}{x}\left(\alpha\cos(2\ln x) + \beta\sin(2\ln x)\right), \quad (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\right\}}$$

**Exercice 7 :** Soit $(E) : ty'' - y' - t^3y = 0$. Résoudre $(E)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ à l'aide du changement de variable $x = t^2$, en posant : $y(t) = z(x)$.

On pose $x = t^2$ qui, sur $\mathbb{R}^{+*}$ est deux fois dérivable et bijectif. On pose $y(t) = z(x) = z(t^2)$, où $z$ est également deux fois dérivable. On a alors
$$y'(t) = 2tz'(t^2) \text{ et } y''(t) = 2z'(t^2) + 4t^2z''(t^2)$$
L'équation $(E)$ devient, après calcul $4z''(x) - z(x) = 0 \quad (E')$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Les solutions de $(E')$ sont :
$$\mathcal{S}_{E'} = \left\{x \mapsto \alpha e^{\frac{1}{2}x} + \beta e^{-\frac{1}{2}x}, \quad (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\right\}$$
On revient à la variable de départ : les solutions de $(E)$ sont
$$\boxed{\mathcal{S}_E = \left\{t \mapsto \alpha e^{\frac{1}{2}t^2} + \beta e^{-\frac{1}{2}t^2}, \quad (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\right\}}$$

**Exercice 8 :** 1) Soit $f \in \mathcal{C}^1(]0,+\infty[,\mathbb{R})$ vérifiant la condition $(C) : \forall x > 0, f'(x) = -\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{x}\right)$.
Montrer que $f$ est solution de l'équation $(E) : 4x^2y'' + y = 0$.

2) Résoudre $(E)$ sur $]0,+\infty[$ à l'aide du changement de variable : $x = e^t$.
3) Déterminer toutes les fonctions $f$ vérifiant $(C)$

1. Si $f$ vérifie $(C)$, elle est $\mathcal{C}^2$, puisque sa dérivée est égale à $x \mapsto \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{x}\right)$ qui est $\mathcal{C}^1$ par composée. En dérivant, on obtient pour tout $x > 0$ :

$$f''(x) = \frac{1}{2x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right)$$

Or, en appliquant $(C)$ en $\frac{1}{x}$, on obtient

$$f'\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{2} f(x)$$

et on en déduit

$$f''(x) = \frac{1}{2x^2}\left(-\frac{1}{2} f(x)\right)$$

c'est-à-dire $4x^2 f''(x) + f(x) = 0$ : $f$ vérifie $(E)$.

2. On pose $x = e^t$ et on note $y(x) = z(t) = z(\ln x)$, avec $z$ deux fois dérivable. On obtient alors :

$$\begin{aligned} 4x^2 y'' + y = 0 &\iff 4x^2\left(-\frac{1}{x^2} z'(\ln x) + \frac{1}{x^2} z''(\ln x)\right) + z(\ln x) = 0 \\ &\iff -4z'(t) + 4z''(t) + z(t) = 0 \quad (E') \end{aligned}$$

Cette équation $(E')$ a pour équation caractéristique $4X^2 - 4X + 1 = 0$, de racine double $\frac{1}{2}$. Les solutions de $(E)$ sont donc :

$$\mathcal{S}_{E'} = \left\{t \mapsto (\alpha t + \beta) e^{\frac{1}{2} t}, \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

On revient à la variable de départ : les solutions de $(E)$ sont donc

$$\boxed{\mathcal{S}_E = \left\{x \mapsto (\alpha \ln x + \beta)\, e^{\frac{1}{2} \ln x}, \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\right\} = \left\{x \mapsto (\alpha \ln x + \beta)\sqrt{x}, \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\right\}}$$

3. On a montré (question 1) que les fonctions vérifiant $(C)$ vérifie $(E)$. Déterminons maintenant les fonctions solutions de $(E)$ vérifiant $(C)$. On note $f : x \mapsto (\alpha \ln x + \beta)\sqrt{x}$. Alors, d'une part (pour $x > 0$) :

$$f'(x) = \alpha \frac{1}{x}\sqrt{x} + (\alpha \ln x + \beta)\frac{1}{2\sqrt{x}} = \left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{x}} + \alpha \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}$$

D'autre part

$$-\frac{1}{2} f\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{2}\left(\alpha \ln \frac{1}{x} + \beta\right)\sqrt{\frac{1}{x}} = -\frac{\beta}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\alpha \ln x}{2\sqrt{x}}$$

Alors $f$ vérifie $(E)$ et $(C)$ si et seulement si :

$$\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{x}} + \alpha \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} = -\frac{\beta}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\alpha \ln x}{2\sqrt{x}}$$

ce qui donne

$$(\alpha + \beta)\frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \iff \alpha + \beta = 0$$

Ainsi, l'ensemble des fonctions vérifiant $C$ sont :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{x \mapsto \alpha(\ln x - 1)\sqrt{x}, \quad \alpha \in \mathbb{R}\right\}}$$