$f(\vec{i}), f(\vec{j}), f(\vec{k})$ connus : on connaît parfaitement f.

$$\forall \vec{u}(x,y,z),\quad f(\vec{u}) = f((x,y,z)) = f(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}) \underset{\text{linéarité de } f}{=} \underbrace{x f(\vec{i}) + y f(\vec{j}) + z f(\vec{k})}_{\in \mathrm{Vect}(f(\vec{i}), f(\vec{j}), f(\vec{k}))} \checkmark$$

f est un projecteur $\iff \underbrace{f\circ f = f}_{\text{à vérifier pour tout vecteur de l'espace}}$ (on sait $f \in \mathcal{L}(E)$) $\iff \underbrace{f\circ f(\vec{i}) = f(\vec{i}) \text{ idem } \vec{j} \text{ et } \vec{k}}_{\text{3 vérifications à faire}}$

$$f(f(\vec{i})) = f(\underbrace{3\vec{i}+4\vec{j}-5\vec{k}}_{(3,4,-5)}) = 3f(\vec{i}) + 4f(\vec{j}) - 5f(\vec{k})$$
$$= 3(3\vec{i}+4\vec{j}-5\vec{k}) + 4(-4\vec{i}-7\vec{j}+10\vec{k}) - 5(-2\vec{i}-4\vec{j}+6\vec{k})$$
$$= \vec{i}(9-16+10) + \vec{j}(12-28+20) + \vec{k}(-15+40-30)$$
$$= 3\vec{i}+4\vec{j}+5\vec{k} = f(\vec{i})$$

De même, $f\circ f(\vec{j}) = f(\vec{j})$ et $f(f(\vec{k})) = f(\vec{k})$] Donc f est un projecteur

Éléments caractéristiques de f ? $\ker f$ et $\mathrm{Im} f$ (f est la proj sur $\mathrm{Im}(f)$ parallèlement à $\ker(f)$; $E = \mathrm{Im}(f) \oplus \ker f$)

- $\ker f$? $\vec{u}(x,y,z) \in \ker f \iff f(\vec{u}) = \vec{0}_{\text{espace}} \iff f(x,y,z) = (0,0,0)$

$$\iff x f(\vec{i}) + y f(\vec{j}) + z f(\vec{k}) = (0,0,0)$$

$$\iff x(3,4,-5) + y(-4,-7,10) + z(-2,-4,6) = (0,0,0)$$

$$\iff \mathcal{S}\begin{cases} 3x-4y-2z=0 \\ 4x-7y-4z=0 \\ -5x+10y+6z=0 \end{cases}$$ système linéaire 3×3, homogène

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 4 & -7 & -4 \\ -5 & 10 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{réduire}]{\text{échelonner}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2/5 \\ 0 & 1 & 4/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On repasse au système : $\mathcal{S} \iff \begin{cases} x = -\frac{2}{5}z \\ y = -\frac{4}{5}z \end{cases}$

$$\vec{u} \in \ker f \iff \vec{u} = \left(-\tfrac{2}{5}z, -\tfrac{4}{5}z, z\right) \iff \vec{u} = z\left(-\tfrac{2}{5}, -\tfrac{4}{5}, 1\right)$$

Bilan : $\boxed{\ker f = \mathrm{Vect}\left(\left(-\tfrac{2}{5}, -\tfrac{4}{5}, 1\right)\right)}$ (ou $\ker f = \mathrm{Vect}((-2,-4,5))$) Droite vectorielle donc $\mathrm{Im} f$ est un plan