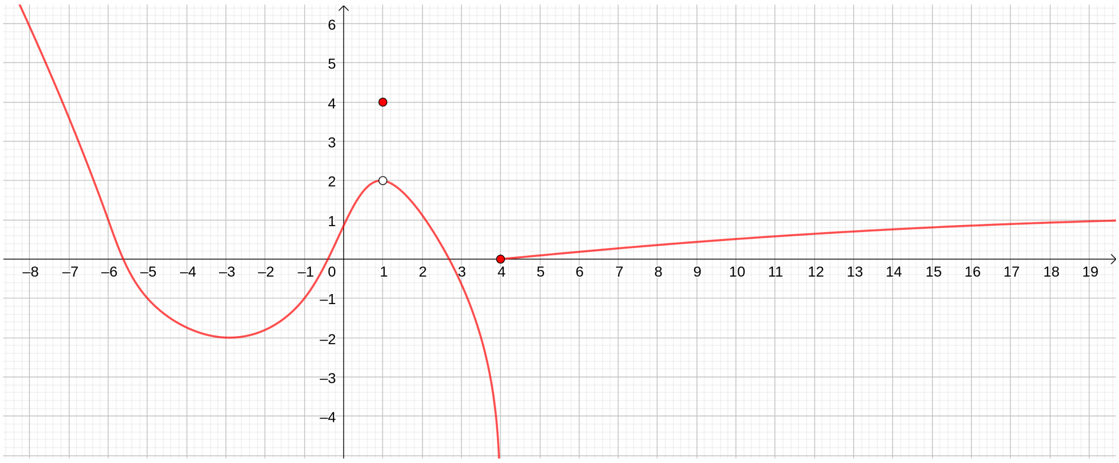
Chapitre 10 - Continuité - Exercices.

1 Applications directes du cours

Exercice n° 1

1. On considère la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ et dont la courbe est représentée ci-dessous :



Lire graphiquement les limites de f en $-\infty$, -3, 1, 1^+, 4^-, $+\infty$. Discuter la continuité de f en 1, en 4.

2. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ et $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x^2}}$ qui illustrent que « $1^{+\infty}$ » est une forme indéterminée.
3. La fonction $x \mapsto x^x$ peut-elle se prolonger par continuité en 0 ?
4. Prouver que $x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ n'a pas de limite en 0^+.
5. Etudier la continuité des fonctions suivantes :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \sin x & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si } x < 0 \\ \cos x & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } x \in [-1;1] \\ 2x-3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

6. Etudier les limites en $+\infty$ de $x \longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ et $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}$.

Exercice n° 2

Soit $f(x) = \dfrac{2x^2-4x-30}{x^2+2x-3}$.

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$.
2. Discuter la continuité de f.

Exercice n° 3

1. Prouver que, pour tout réel k, l'équation $2x^3-3x+2=k$ admet des solutions.
2. Donner l'image de $[-1;1[$ par les fonctions $f(x)=x^3+x$ et $g(x)=x^2-x$.
3. Pour les fonctions suivantes, déterminer l'image de l'intervalle I proposé.

$$f_1(x)=4x+1,\ I_1=[-3;7[\quad ; \quad f_2(x)=x^2,\ I_2=[1;3[\quad ; \quad f_3(x)=x^2,\ I_3=[-4;1[$$

4. Trouver la plus grande valeur du réel positif a tel que $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ réalise une bijection de $]0;a]$ sur un intervalle à déterminer.
5. On reprend la question 1. : préciser le nombre de solutions en fonction de k.

2 Vrai ou faux sur l'ensemble du chapitre

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, a un élément ou une borne de I. f et g sont des fonctions définie sur I.

a) Une fonction bornée admet des limites.
b) Une fonction qui admet des limites est bornée.
c) Une fonction continue bornée atteint ses bornes.
d) Si f est continue sur I alors $|f|$ aussi.
e) Si $|f|$ est continue sur I alors f aussi.
f) Si $f \circ g$ est continue alors f et g sont continues.
g) Si f est continue sur $[a;b]$ et $f(a)f(b) < 0$ alors f s'annule sur $[a;b]$.
h) Si f est continue sur $[a;b]$ et $f(a)f(b) > 0$ alors f ne s'annule pas sur $[a;b]$.
i) Si $f(I)$ est un intervalle alors f est continue sur I.
j) Une bijection continue admet une réciproque continue.

3 Un peu plus dur

Exercice n° 4

Lorsqu'elles existent, déterminer les limites suivantes.

a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2|x|}{x}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{x^2+2|x|}{x}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$ d) $\displaystyle\lim_{x\to\pi} \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{x-1}{x^n-1}$ $(n \geq 1)$ f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}$ g) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$ h) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{x+2}{x^2\ln x}$

i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 2x\ln(x+\sqrt{x})$ j) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{x^2}}{x^2-x}$ k) $\displaystyle\lim_{x\to0} x\lfloor\frac{1}{x}\rfloor$ l) $\displaystyle\lim_{x\to0} x\lfloor\frac{1}{x^2}\rfloor$

Remarque : la notation lim *est abusive pour les limites qui n'existent pas.*

Exercice n° 5

Soit $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$. Donner le domaine de définition de f.
Est-il possible de prolonger f par continuité ?

Exercice n° 6

Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité sur les intervalles indiqués ?

$$f_1(x) = \tfrac{\sin x}{x} \text{ sur } \mathbb{R} \quad ; \quad f_2(x) = x^{(x^x)} \text{ sur } \mathbb{R}^+ \quad ; \quad f_3(x) = \tfrac{x^2}{\mathrm{e}^x-1} \text{ sur } \mathbb{R}$$

Exercice n° 7

Soit $f : x \longmapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \text{ est un nombre premier} \\ 1 \text{ sinon.} \end{cases}$. La fonction f admet-elle une limite en $+\infty$?

Exercice n° 8

Montrer qu'une fonction continue qui est nulle sur $\mathbb{Q}$ est nulle sur $\mathbb{R}$.

Exercice n° 9

1. Prouver que l'équation $\mathrm{e}^x + x = 0$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. Programmer une fonction `alpha_precision(epsilon)` qui, étant donné un réel $\varepsilon > 0$ renvoie une valeur approchée de α avec une précision ε.
3. Utiliser la fonction programmée à la question précédente pour fournir une valeur approchée à 10^{-6} de α.

Exercice n° 10

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $|f|$ est constante. Montrer que f est constante. Ce résultat est-il toujours vrai si f est à valeurs complexes ?

Exercice n° 11

Soit f et g deux fonctions de $\mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{R})$ telles que $f([0;1]) \subset g([0;1])$. Montrer que les courbes représentatives de f et de g se croisent.

Exercice n° 12

Une voiture parcourt 100 km en 1h. Justifier qu'il existe au moins un quart d'heure pendant lequel la voiture a parcouru exactement 25 km.

4 Démontrer les résultats du cours

Exercice n° 13

1. Montrer que si la fonction f a une limite finie en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ alors f est bornée au voisinage de a.
2. Montrer que toute fonction croissante et majorée admet une limite finie en $+\infty$.
3. Prouver que si f et g sont deux fonctions qui ont des limites finies en 3 alors $f + g$ et $f \times g$ ont des limites finies en 3.

5 Plus difficile...

Exercice n° 14

La fonction $x \longmapsto \dfrac{x^{\lfloor x \rfloor}}{\lfloor x \rfloor^x}$ admet-elle une limite en $+\infty$.

Exercice n° 15

Trouver toutes les fonctions de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui vérifient : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(\frac{x}{2})$.

Exercice n° 16

Soit E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \left(f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\right)^2 \leq f(x)f(y)$.

Montrer que E est stable par somme et par produit.

Remarque : ce dernier exercice ne porte pas sur la continuité.