

Chapitre 10 - Continuité - Exercices.

Exercice n° 1

VRAI ou FAUX sur l'ensemble du chapitre.

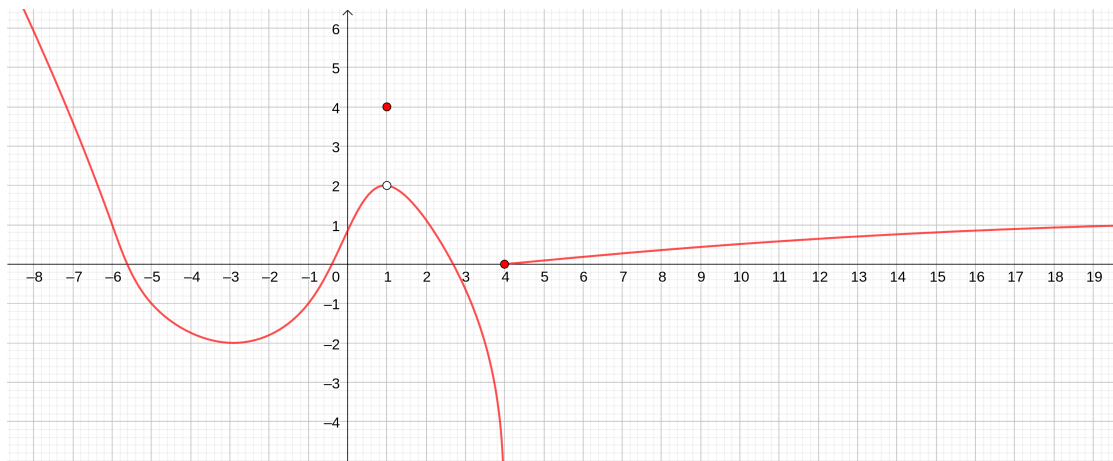
I désigne un intervalle de \mathbb{R} , a un élément ou une borne de I . f et g sont des fonctions définies sur I .

- Une fonction bornée admet des limites.
- Une fonction qui admet des limites est bornée.
- Une fonction continue bornée atteint ses bornes.
- Si f est continue sur I alors $|f|$ aussi.
- Si $|f|$ est continue sur I alors f aussi.
- Si $f \circ g$ est continue alors f et g sont continues.
- Si f est continue sur $[a; b]$ et $f(a)f(b) < 0$ alors f s'annule sur $[a; b]$.
- Si f est continue sur $[a; b]$ et $f(a)f(b) > 0$ alors f ne s'annule pas sur $[a; b]$.
- Si $f(I)$ est un intervalle alors f est continue sur I .
- Une bijection continue admet une réciproque continue.

1 Applications directes du cours

Exercice n° 2

1. On considère la fonction f , définie sur \mathbb{R} et dont la courbe est représentée ci-dessous :



Lire graphiquement les limites de f en $-\infty$, -3 , 1 , 1^+ , 4^- , $+\infty$. Discuter la continuité de f en 1 , en 4 .

- Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x^2}}$ qui illustrent que « $1^{+\infty}$ » est une forme indéterminée.
- La fonction $x \mapsto x^x$ peut-elle se prolonger par continuité en 0 ?
- Prouver que $x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ n'a pas de limite en 0^+ .
- Etudier la continuité des fonctions suivantes :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \sin x & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si } x < 0 \\ \cos x & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } x \in [-1; 1] \\ 2x-3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- Etudier les limites en $+\infty$ de $x \mapsto e^{ix}$ et $x \mapsto \frac{e^{ix}}{x}$.

Exercice n° 3

Soit $f(x) = \frac{2x^2 - 4x - 30}{x^2 + 2x - 3}$.

1. Déterminer \mathcal{D}_f .
2. Discuter la continuité de f .

Exercice n° 4

1. Prouver que, pour tout réel k , l'équation $2x^3 - 3x + 2 = k$ admet des solutions.
2. Donner l'image de $[-1; 1[$ par les fonctions $f(x) = x^3 + x$ et $g(x) = x^2 - x$.
3. Pour les fonctions suivantes, déterminer l'image de l'intervalle I proposé.

$$f_1(x) = 4x + 1, I_1 = [-3; 7[\quad ; \quad f_2(x) = x^2, I_2 = [1; 3[\quad ; \quad f_3(x) = x^2, I_3 = [-4; 1[$$

4. Trouver la plus grande valeur du réel positif a tel que $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ réalise une bijection de $]0; a[$ sur un intervalle à déterminer.
5. On reprend la question 1. : préciser le nombre de solutions en fonction de k .

2 Un peu plus dur

Exercice n° 5

Lorsqu'elles existent, déterminer les limites suivantes.

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2|x|}{x}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2|x|}{x}$ c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$ d) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x}$

e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^n - 1}$ ($n \geq 1$) f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + 5} - \sqrt{x - 3}$ g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + x^2} - 1}{x^2}$ h) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + 2}{x^2 \ln x}$

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x \ln(x + \sqrt{x})$ j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{x^2}}{x^2 - x}$ k) $\lim_{x \rightarrow 0} x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$ l) $\lim_{x \rightarrow 0} x \lfloor \frac{1}{x^2} \rfloor$

Remarque : la notation \lim est abusive pour les limites qui n'existent pas.

Exercice n° 6

Soit $f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$. Donner le domaine de définition de f .
Est-il possible de prolonger f par continuité?

Exercice n° 7

Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité sur les intervalles indiqués?

$$f_1(x) = \frac{\sin x}{x} \text{ sur } \mathbb{R} \quad ; \quad f_2(x) = x^{(x^x)} \text{ sur } \mathbb{R}^+ \quad ; \quad f_3(x) = \frac{x^2}{e^x - 1} \text{ sur } \mathbb{R}$$

Exercice n° 8

Soit $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ est un nombre premier} \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$. La fonction f admet-elle une limite en $+\infty$?

Exercice n° 9

Montrer qu'une fonction continue qui est nulle sur \mathbb{Q} est nulle sur \mathbb{R} .

Exercice n° 10

1. Prouver que l'équation $e^x + x = 0$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. Programmer une fonction `alpha_precision(epsilon)` qui, étant donnée un réel $\varepsilon > 0$ renvoie une valeur approchée de α avec une précision ε .
3. Utiliser la fonction programmée à la question précédente pour fournir une valeur approchée à 10^{-6} de α .

Exercice n° 11

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $|f|$ est constante. Montrer que f est constante. Ce résultat est-il toujours vrai si f est à valeurs complexes ?

Exercice n° 12

Soit f et g deux fonctions de $\mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$ telles que $f([0; 1]) \subset g([0; 1])$. Montrer que les courbes représentatives de f et de g se croisent.

Exercice n° 13

Une voiture parcourt 100 km en 1h. Justifier qu'il existe au moins un quart d'heure pendant lequel la voiture a parcouru exactement 25 km.

3 Démontrer les résultats du cours

Exercice n° 14

1. Montrer que si la fonction f a une limite finie en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ alors f est bornée au voisinage de a .
2. Montrer que toute fonction croissante et majorée admet une limite finie en $+\infty$.
3. Prouver que si f et g sont deux fonctions qui ont des limites finies en 3 alors $f + g$ et $f \times g$ ont des limites finies en 3.

4 Plus difficile...

Exercice n° 15

La fonction $x \mapsto \frac{x^{\lfloor x \rfloor}}{\lfloor x \rfloor^x}$ admet-elle une limite en $+\infty$.

Exercice n° 16

Trouver toutes les fonctions de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui vérifient : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$.

Exercice n° 17

Soit E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \left(f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)^2 \leq f(x)f(y)$.
Montrer que E est stable par somme et par produit.

Remarque : ce dernier exercice ne porte pas sur la continuité.