Correction des exercices du chapitre 10.

Exercice n° 1

a) Faux. cos est bornée mais n'admet pas de limite en $+\infty$.

b) Faux. exp admet des limites (partout) mais n'est pas bornée.

c) Faux. Arctan est continue et bornée mais elle n'atteint pas ses bornes.

d) Vrai. Soit $f_+ = \max(f, 0)$ et $f_- = \min(f, 0)$. Commençons par prouver que f_+ et f_- sont continues sur I. Soit $a \in I$. Si $f(a) \neq 0$, mettons $f(a) > 0$, alors au voisinage de a on a $f_+ = f$ et $f_- = 0$ donc f_+ et f_- sont continues en a. Si $f(a) = 0$ on a $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ et donc $\lim_{x\to a} f_+(x) = \lim_{x\to a} \max(f(x), 0) = 0$ et de même $\lim_{x\to a} f_-(x) = 0$.
En remarquant que $|f| = f_+ - f_-$ on en déduit la continuité de $|f|$ sur I.

e) Faux. La fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \geq 0 \\ -1 \text{ si } x < 0 \end{cases}$ fournit un contre-exemple.
En effet, $|f| = 1$ est continue sur $\mathbb{R}$ alors que f n'est pas continue en 0.

f) Faux. On reprend l'exemple précédent avec la valeur absolue appliquée à f. La composée est $|f|$ qui est continue sur $\mathbb{R}$ alors que f n'est pas continue en 0.

g) Vrai. Si $f(a)f(b) < 0$ alors $f(a)$ et $f(b)$ sont non nuls et de signes différents, le TVI assure l'existence d'au moins une solution à $f(x) = 0$ sur $]a; b[$

h) Faux. $f = \exp$, $(a, b) = (0, 1)$ fournit un contre-exemple.

i) Faux. Soit $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ si } x \neq 1 \\ 0 \text{ si } x = 1 \end{cases}$
$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+ = [0; +\infty[$ est un intervalle mais f n'est pas continue en 1.

j) Vrai. Soit $f : I \to J$ une bijection continue entre deux intervalles I et J. La courbe représentative de f^{-1} se déduisant de celle de f par une symétrie axiale, la continuité de f entraîne celle de f^{-1}.

1 Applications directes du cours

Exercice n° 2

1. On lit : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-3} f(x) = -2$, $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to4^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ et f n'admet pas de limite en 1 puisque $f(1) \neq 2$. f n'est donc pas continue en 1. En 4, f est également discontinue, mais elle est continue à droite.
2. Pour $x \in]-1; +\infty[\setminus\{0\}$ on a : $(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{\frac{\ln(1+x)}{x}} \underset{x\to0}{\longrightarrow} \mathrm{e}$ et $(1+x)^{\frac{1}{x^2}} = \mathrm{e}^{\frac{\ln(1+x)}{x^2}} \underset{x\to0}{\longrightarrow} +\infty$.
3. On a : $\forall x > 0,\ x^x = \mathrm{e}^{x\ln(x)}$. Comme $\lim\limits_{x\to0} x\ln(x) = 0$ on a $\lim\limits_{x\to0} x^x = 1$ et donc $x \mapsto x^x$ peut se prolonger par continuité en 0 en posant $0^0 = 1$.
4. Soit, pour $x \neq 0$, $f : x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$. Considérons les suites $u = \left(\frac{1}{\pi n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $v = \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Comme $\forall n > 0,\ f(u_n) = 0$ et $f(v_n) = 1$ et que $u \to 0^+$ et $v \to 0^+$ on peut affirmer que f n'a pas de limite en 0^+.
5. — Pour $a \neq 0$, f est localement égale à une fonction continue au voisinage de a (sin ou 0) et donc f est continue en a.
   En 0, on a $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} f(x) = f(0)$ donc f est continue en 0. Finalement, f est continue sur $\mathbb{R}$.
   — g est continue en $a \neq 0$. $\lim\limits_{x\to0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to0^+} g(x) = g(0)$ donc g est continue en 0 et sur $\mathbb{R}$.
   — h est continue en a pour $a \notin \{-1; 1\}$. En étudiant les limites à gauche et à droite, on voit que h est continue en -1 mais pas en 1.

6. Comme $\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}) = \cos x$ n'a pas de limite en $+\infty$ alors $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ non plus.
$\mathrm{Re}(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}) = \frac{\cos x}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\mathrm{Im}(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}) = \frac{\sin x}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice n° 3

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 2x - 3 = 0 \iff (x-1)(x+3) = 0 \iff x \in \{1; -3\}$ et donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{1; -3\}$.
2. f est le quotient de deux fonctions continues sur $\mathcal{D}_f$, f est donc continue sur $\mathcal{D}_f$. Pour savoir si on peut la prolonger par continuité, on regarde les limites à gauche et à droite en 1 et en -3.
   — En 1 : $\lim\limits_{x\to 1} 2x^2 - 4x - 30 = -32$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} x^2 + 2x - 3 = 0^-$ donc, par opérations $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -+\infty$. f ne peut donc pas être prolongée par continuité en 1.
   — En -3 : $\lim\limits_{x\to -3} 2x^2 - 4x - 30 = 0$, on ne peut donc pas procéder par opérations comme on l'a fait en 1. Mais cette limite signifie aussi que -3 est une racine du numérateur et on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ 2x^2 - 4x - 30 = (x+3)(2x-10)$. Il suit que :
   $$\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f(x) = \frac{(x+3)(2x-10)}{(x-1)(x+3)} = \frac{2x-10}{x+1}$$
   Cette dernière expression n'est pas une forme indéterminée pour $x \to -3$ et $\lim\limits_{x\to -3} f(x) = 4$.
   En posant $f(-3) = 4$ on prolonge donc f par continuité.

Exercice n° 4

1. La fonction $f : x \mapsto 2x^3 - 3x + 2$ est polynômiale et donc continue sur $\mathbb{R}$. Ses limites en $-\infty$ et $+\infty$ sont $-\infty$ et $+\infty$ respectivement. Le TVI s'applique et, pour tout réel k, l'équation $2x^3 - 3x + 2 = k$ admet au moins une solution.
2. — f est continue sur $\mathbb{R}$ et donc sur $[-1; 1]$ en tant que fonction polynômiale. Elle est croissante sur $\mathbb{R}$ et donc sur $[-1; 1]$ comme somme de fonctions croissantes. vers On en déduit qu'elle réalise une bijection de $[-1; 1]$ vers $f([-1; 1]) = [f(-1); f(1)] =$.
   — De façon analogue, g est continue sur $[-1; 1]$. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = 2x - 1$ donc on déduit que g est décroissante sur $[-1; \frac{1}{2}]$ et croissante sur $[\frac{1}{2}; 1]$. g réalise donc des bijections de $[-1; \frac{1}{2}]$ vers $g([-1; \frac{1}{2}]) = [g(\frac{1}{2}); g(-1)] = [-\frac{1}{4}; 2]$ et de $[\frac{1}{2}; 1]$ vers $g([\frac{1}{2}; 1]) = [g(\frac{1}{2}); g(1)] = [-\frac{1}{4}; 0]$.
   On en déduit :
   $$g([-1; 1]) = g([-1; \frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}; 1]) = g([-1; \frac{1}{2}]) \cup g([\frac{1}{2}; 1]) = [-\frac{1}{4}; 2] \cup [-\frac{1}{4}; 0] = [-\frac{1}{4}; 2]$$
3. De façon analogue, on a :$f_1(I_1) = [-11; 29[$, $f_2(I_2) = [1; 9[$ et $f_3(I_3) = [0; 16]$.
4. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$. On a : $\forall x > 0,\ f'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$ et donc f est strictement croissante sur $]0; \mathrm{e}]$, strictement décroissante sur $[\mathrm{e}; +\infty[$. On en déduit que la valeur a cherchée est $a = \mathrm{e}$ et f réalise une bijection de $]0; \mathrm{e}]$ vers $f(]0; \mathrm{e}]) =]\lim_{x\to 0^+} f(x); f(\mathrm{e})] =]-\infty; \frac{1}{\mathrm{e}}]$.
5. Pour préciser le nombre de solutions, il faut étudier les variations de f.
   f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynômiale et on a $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 6x^2 - 3 = 3(2x^2 - 1) = 3(x\sqrt{2} - 1)(x\sqrt{2} + 1)$. On en déduit que :
   — f est strictement croissante sur $I_1 =]-\infty; -\frac{\sqrt{2}}{2}]$ et sur $I_3 = [\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty[$;
   — f est strictement décroissante sur $I_2 =]-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}[$.
   De plus, f réalise des bijections :
   — de I_1 vers $f(I_1) =]\lim_{x\to-\infty} f(x); f(-\frac{\sqrt{2}}{2})] =]-\infty; 2 + \sqrt{2}]$;
   — de I_2 vers $f(I_2) = f(]-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}[) =]f(\frac{\sqrt{2}}{2}); f(-\frac{\sqrt{2}}{2})[=]2 - \sqrt{2}; 2 + \sqrt{2}[$;
   — de I_3 vers $f(I_3) = [f(\frac{\sqrt{2}}{2}); \lim_{x\to+\infty} f(x)[= [2 - \sqrt{2}; +\infty[$.
   Finalement :
   — si $k < 2 - \sqrt{2}$ alors $f(x) = k$ a une unique solution dans I_1 ;

— si $k = 2-\sqrt{2}$ alors $f(x) = k$ a exactement deux solutions : un élément de I_1 et $\frac{\sqrt{2}}{2}$;
— si $k \in]2-\sqrt{2}; 2+\sqrt{2}[$ alors $f(x) = k$ a exactement trois solutions qui sont dans I_1, I_2 et I_3 ;
— si $k = 2+\sqrt{2}$ alors $f(x) = k$ a exactement deux solutions : $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et un élément de I_3 ;
— si $k > 2+\sqrt{2}$ alors $f(x) = k$ a une unique solution dans I_3.

2 Un peu plus dur

Exercice nº 5

a) Pour $x < 0$ on a $|x| = -x$ et donc $\frac{x^2+2|x|}{x} = \frac{x^2-2x}{x} = x-2$.
Il suit que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2|x|}{x} = \lim_{x\to-\infty} x-2 = -\infty$

b) D'une part, pour $x > 0$ on a $|x| = x$ et donc $\frac{x^2+2|x|}{x} = x+2$.
Il suit que $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{x^2+2|x|}{x} = \lim_{x\to0^+} x+2 = 2$.
De façon analogue pour $x < 0$ on obtient $\displaystyle\lim_{x\to0^-} \frac{x^2+2|x|}{x} = \lim_{x\to0^-} x-2 = -2$.
Finalement, $\dfrac{x^2+2|x|}{x}$ n'a pas de limite en 0.

c) $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2-4 = (x+2)(x-2)$ et $x^2-3x+2 = (x-2)(x-1)$.
Il suit que $\displaystyle\lim_{x\to2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to2} \frac{x+2}{x-1} = 4$.

d) $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin^2 x = 1-\cos^2 x = (1-\cos x)(1+\cos x)$. Il suit que $\displaystyle\lim_{x\to\pi} \frac{\sin^2 x}{1+\cos x} = \lim_{x\to\pi} 1-\cos x = 2$.

e) Pour $n \geq 1$, $x^n - 1 = (x-1)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^k$ et donc $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{x-1}{x^n-1} = \lim_{x\to1} \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} x^k} = \frac{1}{n}$.

f) $\forall x \geq 3,\ \sqrt{x+5}-\sqrt{x-3} = \frac{8}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}}$.
Il suit que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+5}-\sqrt{x-3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{8}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}} = 0$.

g) $\forall x \in \mathbb{R},\ \sqrt[3]{1+x^2}-1 = \frac{x^2}{(\sqrt[3]{1+x^2})^2+\sqrt[3]{1+x^2}+1}$.
On en déduit : $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2} = \lim_{x\to0} \frac{1}{(\sqrt[3]{1+x^2})^2+\sqrt[3]{1+x^2}+1} = \frac{1}{3}$.

h) Sachant que $x\ln x \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$ on a par opérations $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{x+2}{x^2\ln x} = -\infty$

i) Par opérations, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 2x\ln(x+\sqrt{x}) = +\infty$

j) $\forall x > 1,\ \frac{e^x - e^{x^2}}{x^2-x} = \frac{e^{x^2}(e^{x(1-x)}-1)}{x^2(1-\frac{1}{x})}$.
Comme $\frac{e^u}{u} \underset{u\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on déduit par opérations que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x-e^{x^2}}{x^2-x} = -\infty$.

k) $\forall x > 0,\ \frac{1}{x} \leq \lfloor\frac{1}{x}\rfloor < \frac{1}{x}+1$ et donc $1 \leq x\lfloor\frac{1}{x}\rfloor < 1+x$.
Le théorème des gendarmes donne $\displaystyle\lim_{x\to0^+} x\lfloor\frac{1}{x}\rfloor = 1$.
De façon analogue, $\displaystyle\lim_{x\to0^-} x\lfloor\frac{1}{x}\rfloor = 1$ et donc finalement : $\displaystyle\lim_{x\to0} x\lfloor\frac{1}{x}\rfloor = 1$.

l) $\forall x > 0,\ \frac{1}{x^2} \leq \lfloor\frac{1}{x^2}\rfloor < \frac{1}{x^2}+1$ et donc $\frac{1}{x} \leq x\lfloor\frac{1}{x^2}\rfloor < \frac{1}{x}+x$.
Le théorème des gendarmes donne $\displaystyle\lim_{x\to0^+} x\lfloor\frac{1}{x}\rfloor = +\infty$.
De façon analogue, $\displaystyle\lim_{x\to0^-} x\lfloor\frac{1}{x^2}\rfloor = -\infty$ et donc finalement : $x\lfloor\frac{1}{x^2}\rfloor$ n'a pas de limite en 0.

Exercice nº 6

$\sqrt{1+x}$ existe si, et seulement si, $x \geq -1$. $\sqrt{1-x}$ existe si, et seulement si, $x \leq 1$. Donc $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$ existe si, et seulement si, $x \in [-1;1]$ et $f(x)$ est définie sur $[-1;1]\backslash\{0\}$.

On a, $\forall x \in [-1;1]\backslash\{0\},\ f(x) = \frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \frac{2}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$.
On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$ et il est possible de prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.

Exercice nº 7

a) f_1 est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$. On sait que $\lim\limits_{x\to 0} f_1(x) = 1$ donc f_1 se prolonge par continuité sur $\mathbb{R}$ en posant $f_1(0) = 1$.

b) $f_2(x) = x^{x^x} = \mathrm{e}^{x^x \ln(x)} = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{x\ln(x)}\ln(x)}$ est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.
On a : $x\ln(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc $\mathrm{e}^{x\ln(x)}\ln(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\infty$ et $f_2(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.
Finalement, f_2 se prolonge par continuité en 0 en posant $f_2(0) = 0$.

c) f_3 est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$ (comme quotient de fonctions continues).
Pour $x \neq 0$ on a $f_3(x) = x \times \frac{x-0}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^0}$. Comme $\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^0}{x-0} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \exp'(0) = 1$ on en déduit $f_3(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ et donc f_3 se prolonge par continuité en 0 en posant $f_3(0) = 0$.

Exercice nº 8

Soit $u = (2n)_{n\in\mathbb{N}}$ et v la suite des nombres premiers. On a $u_n \to +\infty$ et $v_n \to +\infty$.
$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(u_n) = 1$ et $f(v_n) = 0$ donc $f(u_n) \to 1$ et $f(v_n) \to 0$. f n'a donc pas de limite en $+\infty$.

Exercice nº 9

Soit f qui est continue et nulle sur $\mathbb{Q}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. La suite des approximations des décimales de x, que l'on note $(x_n)_n$, est une suite de rationnels qui converge vers x. Comme f est continue en x on a : $f(x_n) \to f(x)$. Or, $\forall n \in \mathbb{N},\ f(x_n) = 0$. Donc $f(x) = 0$. Finalement, f est nulle sur $\mathbb{R}$.

Exercice nº 10

1. La fonction $f(x) = \mathrm{e}^x + x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ vers $f(\mathbb{R}) =]\lim_{-\infty} f(x); \lim_{+\infty} f(x)[= \mathbb{R}^{+*}$ car f est continue. L'équation $\mathrm{e}^x + x = 0$ admet donc une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. Le code suivant est une implémentation récursive de l'algorithme de la dichotomie. Autrement dit : un programme qui s'appelle lui-même (bienvenue dans la matrice !).

```python
def dicho(f,epsilon,a,b):
    # f est une fonction définie et continue sur [a;b]
    # avec f(a) et f(b) de signes différents
    # epsilon est un réel >0
    # la fonction renvoie une valeur approchée avec une précision epsilon
    # d'une solution de f(x)=0 sur [a;b]]
    c=(b+a)/2
    if b-a<epsilon :
        return(c)
    else :
        if f(c)*f(a)>0:
            return(dicho(f,epsilon,c,b))
        else :
            return(dicho(f,epsilon,a,c))

from math import exp

def fonction_ex10(x):
    return(exp(x)+x)

resultat=dicho(fonction_ex10,10**(-6),-1,0)
```

3. L'execution du code précédent crée la variable `resultat` dont la valeur est :

```
In [5]: resultat
Out[5]: -0.5671429634094238
```

Exercice n° 11

Supposons que f est continue sur $\mathbb{R}$ telle que $|f|$ soit constante.
Si f est de signe constant alors $f = |f|$ ou $f = -|f|$ selon le signe de f et donc f est constante.
Sinon, f change de signe : il existe des réels a et b tels que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes différents. Le TVI assure alors l'existence de c tel que $f(c) = 0$ et $|f|$ n'est pas constante (car $|f|(a) \neq 0$ alors que $|f|(c) = 0$) ce qui est absurde.

Exercice n° 12

Soit f et g deux fonctions de $\mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{R})$ telles que $f([0;1]) \subset g([0;1])$.
g étant continue, elle atteint ses bornes sur le segment $[0;1]$. Autrement dit : il existe des réels α et β de $[0;1]$ tels que $g([0;1]) = [g(\alpha); g(\beta)]$.
Comme $f([0;1]) \subset [g(\alpha); g(\beta)]$ on a $(f-g)(\alpha) > 0$ et $(f-g)(\beta) < 0$.
Or, la fonction $f - g$ est continue comme différence de deux fonctions continues. Le TVI assure l'existence de γ entre α et β tel que $(f-g)(\gamma) = 0$; autrement dit : les courbes représentatives de f et de g se croisent au point d'abscisse γ.

Exercice n° 13

Soit d la fonction définie sur $[0;45]$ qui, au temps (en minutes) $t \in [0;45]$ associe la distance (en km) parcourue entre t et $t+15$.
Dire que la voiture parcourt 100 km en 1h, c'est dire $d(0) + d(15) + d(30) + d(45) = 100$.
Parmi ces quatre nombres :
— soit ils valent tous 25 et alors pendant le premier quart d'heure la voiture a parcouru exactement 25 km ;
— soit l'un deux est différent, mettons que ce soit le premier et qu'il soit supérieur à 25, et alors au moins un autre est inférieur à 25, mettons le 2è. Comme d est continue, le TVI s'applique et il existe $t_0 \in [0;15]$ tel que $d(t_0) = 25$, autrement dit : la voiture a parcouru exactement 25 km pendant le quart d'heure commencé à t_0.

3 Démontrer les résultats du cours

Exercice n° 14

1. Soit f une fonction définie au voisinage V de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et qui admet une limite finie ℓ en a.
   D'après la définition, il existe un voisinage $V' \subset V$ de a tel que, si $x \in V'$ alors $|f(x) - \ell| < 1$.
   Autrement dit : sur V' on a $\ell - 1 < f < \ell + 1$ et f est bornée au voisinage de a.
2. Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$, mettons sur $\mathbb{R}^+$, croissante et majorée.
   L'ensemble des majorants de f est non vide (puisque f est majorée) et minoré par $f(1)$, il admet donc une borne inférieure : $M \in \mathbb{R}$. Prouvons que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = M$.
   Soit $\varepsilon > 0$. $M - \varepsilon$ n'est pas un majorant de f : il existe donc $A > 0$ tel que $M - \varepsilon < f(A)$.
   Comme f est croissante, on a : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ x \geq A \implies M - \varepsilon < f(x)$.
   M étant un majorant de f on a $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f(x) \leq M$ et, en particulier pour $x > A$ on a $f(x) \leq M < M + \varepsilon$.
   Finalement, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ x \geq A \implies M - \varepsilon < f(x) < M + \varepsilon$ ce qui est la définition de $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = M$.
3. Soit f et g sont deux fonctions définies sur un voisinage de 3 noté $\mathcal{D}$ et qui ont des limites finies en 3, mettons ℓ et $\widehat{\ell}$.
   — Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to 3} g(x) = \widehat{\ell}$ on a :
   $$\exists \delta > 0 \ / \ \forall x \in \mathcal{D},\ |x - 3| < \delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } |g(x) - \widehat{\ell}| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Or, d'après l'inégalité triangulaire, $\forall x \in \mathcal{D},\ |(f+g)(x) - (\ell + \widehat{\ell})| \leq |f(x) - \ell| + |g(x) - \widehat{\ell}|$.
Il suit que : $\forall x \in \mathcal{D},\ |x-3| < \delta \Longrightarrow |(f+g)(x) - (\ell+\widehat{\ell})| < \varepsilon$, c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to 3}(f+g)(x) = \ell+\widehat{\ell}$.

— De façon analogue, pour tout $x \in \mathcal{D}$ on a :

$$|fg(x) - \ell\widehat{\ell}| = |(f(x)-\ell+\ell)g(x) - \ell\widehat{\ell}| = |(f(x)-\ell)g(x) + \ell(g(x)-\widehat{\ell})| \leq |f(x)-\ell||g(x)| + |\ell||g(x)-\widehat{\ell}|$$

Comme f et g ont des limites finies en 3, elles sont bornées au voisinage de 3 :

$$\exists \alpha > 0,\ \exists M > 0 \ / \ \forall x \in \mathcal{D},\ |x-3| < \alpha \Longrightarrow |f(x)| < M \text{ et } |g(x)| < M$$

On a, en particulier, $|\ell[\leq M$ et il suit :

$$\forall x \in \mathcal{D},\ |x-3| < \alpha \Longrightarrow |fg(x) - \ell\widehat{\ell}| \leq M(|f(x)-\ell| + |g(x)-\widehat{\ell}|)$$

En reprenant les définitions des limites :

$$\exists \delta > 0 \ / \ \forall x \in \mathcal{D},\ |x-3| < \delta \Longrightarrow |f(x)-\ell| < \frac{\varepsilon}{M} \text{ et } |g(x)-\widehat{\ell}| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Et, finalement :

$$\forall x \in \mathcal{D},\ |x-3| < \min(\alpha,\delta) \implies M(|f(x)-\ell| + |g(x)-\widehat{\ell}|) \leq \varepsilon \implies |fg(x) - \ell\widehat{\ell}| \leq \varepsilon$$

Autrement dit, on a bien : $\lim\limits_{x\to 3} fg(x) = \ell\widehat{\ell}$.

4 Plus difficile...

Exercice n° 15

Soit $f(x) = \dfrac{x^{\lfloor x\rfloor}}{\lfloor x\rfloor^x}$.
On a, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(n) = 1$ et donc $f(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
Par ailleurs, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(n+\frac{1}{2}) = \frac{(n+\frac{1}{2})^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n \times \frac{1}{\sqrt{n}}$.
Comme $\forall n > 0,\ \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln(1+\frac{1}{2n})} = \exp\left(\frac{1}{2}\frac{\ln(1+\frac{1}{2n})}{\frac{1}{2n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$ on en déduit que $f(n+\frac{1}{2}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et que f n'admet pas de limite en $+\infty$.

Exercice n° 16

On raisonne par Analyse-Synthèse.

Anayse : soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f(x) = f(\frac{x}{2})$.
Par une récurrence immédiate, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = f(\frac{x}{2^n})$. Comme f est continue on a $f(x) = f(0)$ et donc f est constante.

Synthèse : toute fonction constante convient.

Exercice n° 17

Notons que f est de signe constant, mettons positif.
La stabilité de E par produit se fait sans difficulté.
Pour la somme : soit f et g deux fonctions de E, montrons que $f+g \in E$.

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a : $\left((f+g)(\frac{x+y}{2})\right)^2 = \left(f(\frac{x+y}{2})\right)^2 + \left(g(\frac{x+y}{2})\right)^2 + 2f(\frac{x+y}{2})g(\frac{x+y}{2})$

$$\underset{f,g\,\in\,E}{\leq} f(x)f(y) + g(x)g(y) + 2f(\tfrac{x+y}{2})g(\tfrac{x+y}{2})$$

Or, E étant stable par produit, on a : $2f(\frac{x+y}{2})g(\frac{x+y}{2}) \leq \sqrt{f(x)f(y)g(x)g(y)}$.

D'autre part, $\left(\sqrt{f(x)g(y)} - \sqrt{f(y)g(x)}\right) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f(x)g(y) + f(y)g(x) \geq 2\sqrt{f(x)g(x)f(y)g(y)}$
Il suit que :

$$\begin{aligned} &\left((f+g)(\frac{x+y}{2})\right)^2 \leq f(x)f(y) + g(x)g(y) + f(x)g(y) + f(y)g(x) \\ \Longleftrightarrow \; &\left((f+g)(\frac{x+y}{2})\right)^2 \leq (f+g)(x)(f+g)(y) \end{aligned}$$

et donc E est stable par somme.