

Chapitre 11 - Polynômes - Exercices

Exercice n° 1

VRAI ou FAUX sur l'ensemble du chapitre.

P et Q désignent des polynômes.

- $4X^5 - 3X^2 + 3 \in \mathbb{R}_7[X]$.
- Le degré d'un polynôme constant est 0.
- $\deg P \circ Q = \deg Q \circ P$.
- Si P^2 est un polynôme unitaire alors P aussi.
- Si P et Q sont unitaires, alors $P \times Q$ et $P \circ Q$ aussi.
- Si $P \circ Q$ est unitaire alors P et Q aussi.
- $X^2 + X$ est scindé à racines simples.
- Un polynôme scindé dans \mathbb{C} est scindé dans \mathbb{R} .
- Il existe un seul polynôme qui soit scindé et unitaire dont les racines sont 1, 2 et 3.
- 2 est racine double de P si, et seulement si, 2 est racine simple de P' .

1 Applications directes du cours

Exercice n° 2

Calculer dans $\mathbb{K}[X]$.

- Soit $A = X^3 - X^2 + 4$ et $B = X^2 - 4$. Sans poser les calculs, donner les degrés des polynômes $2A + 3B$, AB , A^7 , $A \circ B$ et $B \circ A$.
- On garde la situation précédente. Toujours sans poser les calculs donner les coefficients dominants des polynômes $2A + 3B$, AB , A^7 , $A \circ B$ et $B \circ A$.
- On garde la situation précédente. Calculer AB , $B \circ A$ et $A \circ B$.
- On considère $P = 3X^5 - 4X^3 + X + 1$. Déterminer $P^{(n)}$ pour tout entier n .

Exercice n° 3

Divisions euclidiennes, polynômes irréductibles, polynômes scindés, fractions rationnelles.

- Donner la division euclidienne de X^5 par $X - 1$.
- Poser la division euclidienne de $X^2 - 3iX - 5(1 + i)$ par $X - 1 + i$.
- Poser la division euclidienne de $4X^3 + X^2$ par $X + 1 + i$.
- Quel est le reste dans la division euclidienne de $2X^{38} - 5X^{27} + 3X + 2$ par $X - 1$?
- Décomposer $X^4 - 1$ et $X^3 - 1$ en produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$, puis sur $\mathbb{C}[X]$.
- Ecrire $X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1$ sous forme scindée dans $\mathbb{C}[X]$.
- Est-il possible de choisir $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que i soit racine double de $X^3 + \alpha X^2 + X + \alpha$?
- Donner la décomposition en éléments simples des fractions rationnelles $\frac{x^3}{x^2 - 1}$ et $\frac{x^2 + 2x + 3}{x^3 + x}$.

Exercice n° 4

Soit $a \in \mathbb{C}$.

- Poser la division euclidienne de $X^3 + 1$ par $X + a$.
- En déduire tous les diviseurs unitaires de $X^3 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.
- Ecrire $X^3 + 1$ sous forme scindée.

Exercice n° 5

Est-il possible de trouver deux complexes z et z' tels que $zz' = z + z' = i$?

2 Un peu plus dur

Exercice n° 6

On considère le polynôme $P = X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1$.

- Prouver que j est une racine de P . Préciser sa multiplicité.
- En déduire l'existence d'une autre racine double.
- Sans faire trop de calculs, donner une écriture scindée de P .

Exercice n° 7

Est-il possible de trouver $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $X^4 + 8X^3 + 22X^2 + 24X + \alpha$ ait une racine triple ?

Exercice n° 8

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}$. Prouver que P_n ne peut pas avoir de racines multiples.

Exercice n° 9

Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ qui vérifient $P \circ P' = P$.

Exercice n° 10

Soit $n \geq 2$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On pose $P = (X \sin(\theta) + \cos(\theta))^n$.
Déterminer le reste dans les divisions de P par $X^2 + 1$ ainsi que par $(X^2 + 1)^2$.

Exercice n° 11

Soit $n \geq 2$. Donner la décomposition de $X^n - 1$ en produit de facteurs irréductibles.

Exercice n° 12

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $2n > 0$. Prouver qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P + \lambda$ admette une racine multiple.

Exercice n° 13

Donner la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{x^4 + 1}$ sur \mathbb{R} .

Exercice n° 14

Calculer $\sum_{k=1}^{1000} \frac{1}{k^2 + k}$ et $\int_0^1 \frac{3x + 2}{x^3 + 3x^2 - 4x - 12} dx$.

3 Démontrer les résultats du cours

Exercice n° 15

Démontrer la formule de Leibniz.

4 Plus difficile...

Exercice n° 16

- Linéariser $\cos^2(x)$ et $\cos^3(x)$.
- On pose $\alpha = 2 \cos(\frac{2\pi}{7})$. Prouver que α est racine de $P = X^3 + X^2 - 2X - 1$.

Exercice n° 17

Soit A, B, C des polynômes non constants de $\mathbb{K}[X]$. Prouver que si $A \circ C \mid B \circ C$ alors $A \mid B$.

Exercice n° 18

Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P' \mid P$. (On pourra utiliser la formule de Taylor).