Chapitre 11 - Polynômes - Exercices

1 Applications directes du cours

Exercice n° 1

Calculer dans $\mathbb{K}[X]$.

1. De tête, compléter les trous :
$$X^2+X-6=(X-2)(\dots X+\dots) \qquad ; \qquad 2X^3+X+3=(X+1)(\dots X^2+\dots X+\dots)$$
2. Soit $A=X^3-X^2+4$ et $B=X^2-4$. Sans poser les calculs, donner les degrés des polynômes $2A+3B$, AB, A^7, $A\circ B$ et $B\circ A$.
3. On garde la situation précédente. Toujours sans poser les calculs donner les coefficients dominants des polynômes $2A+3B$, AB, A^7, $A\circ B$ et $B\circ A$.
4. On garde la situation précédente. Calculer AB, $B\circ A$ et $A\circ B$.
5. On considère $P=3X^5-4X^3+X+1$. Déterminer $P^{(n)}$ pour tout entier n.

Exercice n° 2

Divisions euclidiennes, polynômes irréductibles, polynômes scindés, fractions rationnelles.

1. Donner la division euclidienne de X^5 par $X-1$.
2. Poser la division euclidienne de $X^2-3\mathrm{i}X-5(1+i)$ par $X-1+\mathrm{i}$.
3. Poser la division euclidienne de $4X^3+X^2$ par $X+1+\mathrm{i}$.
4. On pose $P=3X+1$, $Q=X+2$ et $R=7x+5$. Existe-t-il un polynôme S qui soit combinaison linéaire de P,Q et R et dont $3,4$ et 5 sont des racines ?
5. Quel est le reste dans la division euclidienne de $2X^{38}-5X^{27}+3X+2$ par $X-1$?
6. Décomposer X^4-1 et X^3-1 en produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$, puis sur $\mathbb{C}[X]$.
7. Ecrire $X^4+X^3+2X^2+X+1$ sous forme scindée dans $\mathbb{C}[X]$.
8. Est-il possible de choisir $\alpha\in\mathbb{C}$ tel que i soit racine double de $X^3+\alpha X^2+X+\alpha$?
9. Donner la décomposition en éléments simples des fractions rationnelles $\dfrac{x^3}{x^2-1}$ et $\dfrac{x^2+2x+3}{x^3+x}$.

Exercice n° 3

Soit $a\in\mathbb{C}$.

a) Poser la division euclidienne de X^3+1 par $X+a$.
b) En déduire tous les diviseurs unitaires de X^3+1 dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.
c) Ecrire X^3+1 sous forme scindée.

Exercice n° 4

Est-il possible de trouver deux complexes z et z' tels que $zz'=z+z'=\mathrm{i}$?

2 Vrai ou faux sur l'ensemble du chapitre

P et Q désignent des polynômes.

a) $4X^5-3X^2+3\in\mathbb{R}_7[X]$.
b) Le degré d'un polynôme constant est 0.
c) $\deg P\circ Q=\deg Q\circ P$.
d) Si P^2 est un polynôme unitaire alors P aussi.
e) Si P et Q sont unitaires, alors $P\times Q$ et $P\circ Q$ aussi.
f) Si $P\circ Q$ est unitaire alors P et Q aussi.
g) X^2+X est scindé à racines simples.
h) Un polynôme scindé dans $\mathbb{C}$ est scindé dans $\mathbb{R}$.
i) Il existe un seul polynôme qui soit scindé et unitaire dont les racines sont 1, 2 et 3.
j) 2 est racine double de P si, et seulement si, 2 est racine simple de P'.

3 Un peu plus dur

Exercice n° 5

On considère le polynôme $P = X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1$.

a) Prouver que j est une racine de P. Préciser sa multiplicité.

b) En déduire l'existence d'une autre racine double.

c) Sans faire trop de calculs, donner une écriture scindée de P.

Exercice n° 6

Est-il possible de trouver $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $X^4 + 8X^3 + 22X^2 + 24X + \alpha$ ait une racine triple ?

Exercice n° 7

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$. Prouver que P_n ne peut pas avoir de racines multiples.

Exercice n° 8

Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ qui vérifient $P \circ P' = P$.

Exercice n° 9

Soit $n \geq 2$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On pose $P = (X\sin(\theta) + \cos(\theta))^n$.
Déterminer le reste dans les divisions de P par $X^2 + 1$ ainsi que par $(X^2 + 1)^2$.

Exercice n° 10

Soit $n \geq 2$. Donner la décomposition de $X^n - 1$ en produit de facteurs irréductibles.

Exercice n° 11

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $2n > 0$. Prouver qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P + \lambda$ admette une racine multiple.

Exercice n° 12

Donner la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{x^4 + 1}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice n° 13

Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x + 2}{x^3 + 3x^2 - 4x - 12}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{1000} \frac{1}{k^2 + k}$.

4 Démontrer les résultats du cours

Exercice n° 14

Démontrer la formule de Leibniz.

5 Plus difficile...

Exercice n° 15

a) Linéariser $\cos^2(x)$ et $\cos^3(x)$.

b) On pose $\alpha = 2\cos(\frac{2\pi}{7})$. Prouver que α est racine de $P = X^3 + X^2 - 2X - 1$.

Exercice n° 16

Soit A, B, C des polynômes non constants de $\mathbb{K}[X]$. Prouver que si $A \circ C \mid B \circ C$ alors $A|B$.

Exercice n° 17

Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P'|P$. *(On pourra utiliser la formule de Taylor).*