# Chapitre 11 - Polynômes - Exercices

**Exercice n° 1**

VRAI ou FAUX sur l'ensemble du chapitre.
$P$ et $Q$ désignent des polynômes.

a) $4X^5 - 3X^2 + 3 \in \mathbb{R}_7[X]$.
b) Le degré d'un polynôme constant est 0.
c) $\deg P \circ Q = \deg Q \circ P$.
d) Si $P^2$ est un polynôme unitaire alors $P$ aussi.
e) Si $P$ et $Q$ sont unitaires, alors $P \times Q$ et $P \circ Q$ aussi.
f) Si $P \circ Q$ est unitaire alors $P$ et $Q$ aussi.
g) $X^2 + X$ est scindé à racines simples.
h) Un polynôme scindé dans $\mathbb{C}$ est scindé dans $\mathbb{R}$.
i) Il existe un seul polynôme qui soit scindé et unitaire dont les racines sont 1, 2 et 3.
j) 2 est racine double de $P$ si, et seulement si, 2 est racine simple de $P'$.

## 1 Applications directes du cours

**Exercice n° 2**

Calculer dans $\mathbb{K}[X]$.

1. Soit $A = X^3 - X^2 + 4$ et $B = X^2 - 4$. Sans poser les calculs, donner les degrés des polynômes $2A + 3B$, $AB$, $A^7$, $A \circ B$ et $B \circ A$.
2. On garde la situation précédente. Toujours sans poser les calculs donner les coefficients dominants des polynômes $2A + 3B$, $AB$, $A^7$, $A \circ B$ et $B \circ A$.
3. On garde la situation précédente. Calculer $AB$, $B \circ A$ et $A \circ B$.
4. On considère $P = 3X^5 - 4X^3 + X + 1$. Déterminer $P^{(n)}$ pour tout entier $n$.

**Exercice n° 3**

Divisions euclidiennes, polynômes irréductibles, polynômes scindés, fractions rationnelles.

1. Donner la division euclidienne de $X^5$ par $X - 1$.
2. Poser la division euclidienne de $X^2 - 3\mathrm{i}X - 5(1 + i)$ par $X - 1 + \mathrm{i}$.
3. Poser la division euclidienne de $4X^3 + X^2$ par $X + 1 + \mathrm{i}$.
4. Quel est le reste dans la division euclidienne de $2X^{38} - 5X^{27} + 3X + 2$ par $X - 1$ ?
5. Décomposer $X^4 - 1$ et $X^3 - 1$ en produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$, puis sur $\mathbb{C}[X]$.
6. Ecrire $X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1$ sous forme scindée dans $\mathbb{C}[X]$.
7. Est-il possible de choisir $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que i soit racine double de $X^3 + \alpha X^2 + X + \alpha$ ?
8. Donner la décomposition en éléments simples des fractions rationnelles $\frac{X^3}{X^2-1}$ et $\frac{X^2+2X+3}{X^3+X}$.

**Exercice n° 4**

Soit $a \in \mathbb{C}$.

a) Poser la division euclidienne de $X^3 + 1$ par $X + a$.
b) En déduire tous les diviseurs unitaires de $X^3 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.
c) Ecrire $X^3 + 1$ sous forme scindée.

**Exercice n° 5**

Est-il possible de trouver deux complexes $z$ et $z'$ tels que $zz' = z + z' = \mathrm{i}$ ?

## 2 Un peu plus dur

**Exercice n° 6**

On considère le polynôme $P = X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1$.

a) Prouver que $j$ est une racine de $P$. Préciser sa multiplicité.

b) En déduire l'existence d'une autre racine double.

c) Sans faire trop de calculs, donner une écriture scindée de $P$.

**Exercice n° 7**

Est-il possible de trouver $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $X^4 + 8X^3 + 22X^2 + 24X + \alpha$ ait une racine triple ?

**Exercice n° 8**

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$. Prouver que $P_n$ ne peut pas avoir de racines multiples.

**Exercice n° 9**

Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ qui vérifient $P \circ P' = P$.

**Exercice n° 10**

Soit $n \geq 2$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On pose $P = (X \sin(\theta) + \cos(\theta))^n$.
Déterminer le reste dans les divisions de $P$ par $X^2 + 1$ ainsi que par $(X^2 + 1)^2$.

**Exercice n° 11**

Soit $n \geq 2$. Donner la décomposition de $X^n - 1$ en produit de facteurs irréductibles.

**Exercice n° 12**

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $2n > 0$. Prouver qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P + \lambda$ admette une racine multiple.

**Exercice n° 13**

Donner la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{X^4 + 1}$ sur $\mathbb{R}$.

## 3 Démontrer les résultats du cours

**Exercice n° 14**

Démontrer la formule de Leibniz.

## 4 Plus difficile...

**Exercice n° 15**

a) Linéariser $\cos^2(x)$ et $\cos^3(x)$.

b) On pose $\alpha = 2\cos(\frac{2\pi}{7})$. Prouver que $\alpha$ est racine de $P = X^3 + X^2 - 2X - 1$.

**Exercice n° 16**

Soit $A, B, C$ des polynômes non constants de $\mathbb{K}[X]$. Prouver que si $A \circ C \mid B \circ C$ alors $A|B$.

**Exercice n° 17**

Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P'|P$. *(On pourra utiliser la formule de Taylor).*