Correction des exercices du chapitre 11.

Exercice n° 1

a) Vrai. $\mathbb{R}_7[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients réels dont le degré est ≤ 7.

b) Faux. Le degré du polynôme nul est $-\infty$.

c) Faux. Si $P = 1$ et $Q = 0$ alors $\deg P \circ Q = \deg(1) = 0$ alors que $\deg Q \circ P = \deg(0) = -\infty$.

d) Faux. Si $P = -X$ on a $P^2 = X^2$ qui est unitaire mais P ne l'est pas.

e) Vrai. Soit P et Q des polynômes unitaires. Il ne sont pas nuls et sont donc de la forme $P = X^{\deg(P)} + \widehat{P}$ et $Q = X^{\deg(Q)} + \widehat{Q}$ avec $\deg(\widehat{P}) < \deg(P)$ et $\deg(\widehat{Q}) < \deg(Q)$. On a :

$$P \times Q = (X^{\deg(P)} + \widehat{P})(X^{\deg(Q)} + \widehat{Q}) = \underbrace{X^{\deg(P)+\deg(Q)}}_{\deg=\deg(P)+\deg(Q)} + \underbrace{X^{\deg(Q)}\widehat{P} + X^{\deg(P)}\widehat{Q} + \widehat{P}\widehat{Q}}_{\deg<\deg(P)+\deg(Q)}$$

$P \circ Q = Q^{\deg(P)} + \widehat{P}(Q)$ avec $\deg(Q^{\deg(P)}) = \deg(P)\deg(Q)$ et $\deg(\widehat{P}(Q))$.
Dans les deux cas, on observe que les coefficients dominants valent 1 : les polynômes sont bien unitaires.

f) Faux. $P = 2X$ et $Q = \frac{1}{2}X$ ne sont pas unitaires mais $P \circ Q = X$ l'est

g) Vrai. $X^2 + X = X(X+1)$ est scindé à racines simples.

h) Faux. Tous les polynômes sont scindés dans $\mathbb{C}$ d'après le théorème de Gauss alors que ce n'est pas le cas dans $\mathbb{R}$. Par exemple : $X^2 + 1$ n'est pas scindé dans $\mathbb{R}$.

i) Faux. $(X-1)^2(X-2)(X-3)$ est scindé et unitaire, ses racines sont 1, 2 et 3.

j) Faux. Il y a une implication de la gauche vers la droite mais la réciproque est fausse. Par exemple $P = X^2 - 4X + 1$ n'admet pas 2 comme racine mais 2 est racine simple de P'.

1 Applications directes du cours

Exercice n° 2

1. On applique les formules du cours.
   — $\deg(A) \neq \deg(B)$ donc $\deg(2A + 3B) = \max(\deg(A), \deg(B)) = 3$.
   — A et B sont non nuls donc $\deg(AB) = \deg(A) + \deg(B) = 5$.
   — $A \neq 0$ donc $\deg(A^7) = 7\deg(A) = 21$.
   — A et $B \neq 0$ donc $\deg(A \circ B) = \deg(A)\deg(B) = 6$ et $\deg(B \circ A) = \deg(A)\deg(B) = 6$.
2. En isolant les monômes de plus hauts degrés, on obtient :

Polynôme	$2A+3B$	AB	A^7	$A \circ B$	$B \circ A$
Coefficient dominant	2	1	1	1	1

3. On a : $AB = X^5 - X^4 - 4X^3 + 8X^2 - 12$, $B \circ A = X^6 - 2X^5 + X^4 + 8X^3 - 8X^2 + 12$
   et $A \circ B = X^6 - 13X^4 + 56X^2 - 76$
4. On calcule les dérivées successives de P :

$$P^{(0)} = P \; ; \; P^{(1)} = P' = 15X^4 - 12X^2 + 1 \; ; \; P^{(2)} = 60X^3 - 24X \; ; \; P^{(3)} = 180X^2 - 24$$

$$P^{(4)} = 360X \; ; \; P^{(5)} = 360 \; ; \; \forall n \geq 6, \; P^{(n)} = 0$$

Exercice n° 3

1. La division euclidienne de X^5 par $X - 1$ est $X^5 = (X-1)(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1) + 1$.

2. La division euclidienne de $X^2-3\mathrm{i}X-5(1+\mathrm{i})$ par $X-1+\mathrm{i}$ est :

$$X^2-3\mathrm{i}X-5(1+\mathrm{i})=(X-1+\mathrm{i})(X+1-4\mathrm{i})-8-10\mathrm{i}$$

3. La division euclidienne de $4X^3+X^2$ par $X+1+\mathrm{i}$ est :

$$4X^3+X^2=(X+1+\mathrm{i})(4X^2-(3+4\mathrm{i})X-1+7\mathrm{i})+8-6\mathrm{i}$$

4. Soit Q,R le quotient et le reste dans la division euclidienne de $2X^{38}-5X^{27}+3X+2$ par $X-1$.
On a : $2X^{38}-5X^{27}+3X+2=(X-1)Q+R$ avec $R\in\mathbb{K}_0[X]$.
En évaluant en $X=1$ on obtient : $2=R$.

5. a) $X^4-1=(X^2+1)(X^2-1)=\underbrace{(X^2+1)(X+1)(X-1)}_{\text{facteurs irréd. sur }\mathbb{R}}=\underbrace{(X+\mathrm{i})(X-\mathrm{i})(X+1)(X-1)}_{\text{facteurs irréd. sur }\mathbb{C}\text{ càd scindé}}.$

b) $X^3-1=\underbrace{((X-1)(X^2+X+1)}_{\text{facteurs irréd. sur }\mathbb{R}}=\underbrace{(X-1)(X-j)(X-j^2)}_{\text{facteurs irréd. sur }\mathbb{C}\text{ càd scindé}}$

Remarque : soit $n\in\mathbb{N}^*$. Les racines complexes de X^n-1 sont les racines $n-$ièmes de l'unité.
On sait qu'il y en a exactement n et qu'elles valent $\alpha=\mathrm{e}^{2\pi/n}$; α^2 ; $\ldots$; $\alpha^n=1$.
On sait donc toujours donner X^n-1 sous forme de produits de facteurs irréductibles.

6. On a :
$$\begin{array}{rcl} X^4+X^3+2X^2+X+1 & = & X^2(X^2+X+1)+(X^2+X+1) \\ & = & (X^2+1)(X^2+X+1) \\ & = & (X+\mathrm{i})(X-\mathrm{i})(X-j)(X-j^2) \end{array}.$$

7. Trois versions (au-moins) sont possibles :
— Avec la dérivation :
i est racine double de $P=X^3+\alpha X^2+X+\alpha$ ssi $P(\mathrm{i})=0$, $P'(\mathrm{i})=0$ et $P''(\mathrm{i})\neq 0$). On a :
$P(\mathrm{i})=-\mathrm{i}-\alpha+\mathrm{i}+\alpha=0$ donc i est racine de P.
$P'(\mathrm{i})=-2+2\mathrm{i}\alpha$ et donc i est racine de P' si, et seulement si, $\alpha=-\mathrm{i}$.
On a alors $P''(\mathrm{i})=6\mathrm{i}+2\alpha=4\mathrm{i}\neq 0$.
Finalement, i est racine double de P si, et seulement si, $\alpha=-\mathrm{i}$
— Avec les divisions euclidiennes (on divise P par $X-\mathrm{i}$ deux fois, je ne détaille pas).
— En étant astucieux : on remarque que $P=X^2(X+\alpha)+X+\alpha=(X+\mathrm{i})(X-\mathrm{i})(X+\alpha)$.
Les trois racines de P sont donc $\pm\mathrm{i}$ et $-\alpha$. i est racine double si, et seulement si, $\alpha=-\mathrm{i}$.

8. a) $\frac{X^3}{X^2-1}=\frac{(X^2-1)X+X}{X^2-1}=1+\frac{X}{(X-1)(x+1)}=1+\frac{\frac{1}{2}}{X-1}+\frac{\frac{1}{2}}{X+1}$.

b) $\frac{X^2+2X+3}{X^3+X}=\frac{X^2+2X+3}{X(X^2+1)}$. X^2+1 est irréductible sur $\mathbb{R}$ mais pas sur $\mathbb{C}$.

— Sur $\mathbb{R}$: $\frac{X^2+2X+3}{X^3+X}=\frac{3}{X}+\frac{-2X+2}{X^2+1}$;

— Sur $\mathbb{C}$: $\frac{X^2+2X+3}{X^3+X}=\frac{3}{X}+\frac{-1+\mathrm{i}}{X+\mathrm{i}}+\frac{-1-\mathrm{i}}{X-\mathrm{i}}$;

Exercice n° 4

Soit $a\in\mathbb{C}$.

a) On a $X^3+1=(X+a)(X^2-aX+a^2)+1-a^3$.

b) Les diviseurs de X^3+1 sont de degré $0,1,2$ ou 3.
Soit deux polynômes P et Q tels que $X^3+1=PQ$. Si P est unitaire alors Q l'est aussi et, comme $\deg(P)+\deg(Q)=3$ on va traiter simultanément les degrés 0 et 3 puis 1 et 2.
— Le seul polynôme unitaire constant est 1 et on a $X^3+1=1\times(X^3+1)$.
Pour $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, X^3+1 admet donc un unique diviseur unitaire constant (1) et un unique diviseur unitaire de degré 3 (X^3+1).

— Un polynôme unitaire de degré 1 est de la forme $X+a$ avec $a \in \mathbb{K}$. D'après la question précédente, le reste dans la division de X^3+1 par $X+a$ est $1-a^3$, on en déduit que $X+a \mid X^3+1$ si, et seulement si, $1-a^3=0 \iff a \in \{1; j; j^2\}$.
Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, il y a un unique diviseur de degré 1 unitaire : $X+1$; si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, il y en a trois : $X+1,\ X+j,\ X+j^2$.
Pour trouver les polynômes unitaires de degré 2 qui divisent X^3+1, on permute les rôles de diviseur et de quotient dans la division de X^3+1 par $X+a$ avec un reste nul. Il y a donc un unique diviseur unitaire de degré 2 dans $\mathbb{R}[X]$ (X^2-X+1), il y en a deux de plus dans $\mathbb{C}[X]$ (X^2-jX+j^2 et X^2-j^2X+j).

c) On a : $X^3+1=(X+1)(X+j)(X+j^2)$.

Exercice n° 5

Analyse : supposons qu'il existe deux complexes z et z' tels que $zz'=z+z'=\mathrm{i}$.
z et z' sont les racines du polynôme $P=(X-z)(X-z')=X^2-\mathrm{i}X+\mathrm{i}$.
Le discriminant de P est $\Delta=-1-4\mathrm{i}$. Déterminons δ une racine complexe de Δ, soit $a+\mathrm{i}b$ sa forme algébrique. On a :

$$\delta^2=\Delta \iff \left\{\begin{array}{l} a^2-b^2=-1 \\ a^2+b^2=\sqrt{17} \\ 2ab=-4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} a^2=\frac{\sqrt{17}-1}{2} \\ b^2=\frac{\sqrt{17}+1}{2} \\ a \text{ et } b \text{ sont de signes } \neq \end{array}\right.$$

On choisit $\delta=\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}-\mathrm{i}\sqrt{\frac{\sqrt{17}+1}{2}}$ et alors z et z' sont (à l'ordre près) $\frac{\mathrm{i}+\delta}{2}$ et $\frac{\mathrm{i}-\delta}{2}$.

Synthèse : on vérifie que les valeurs trouvées conviennent.

2 Un peu plus dur

Exercice n° 6

a) On calcule : $P(j)=j^2+2+3j+2j^2+1=3(j+j^2+1)=0$ donc j est une racine de P.
$P'=8X^7+12X^5+12X^3+4X$ et $P'(j)=8j+12j^2+12+4j=12(j+j^2+1)=0$.
$P''=56X^6+60X^4+36X^2+4$ et $P''(j)=56+60j+36j^2+4=60(1+j+j^2)-24j^2=-24j^2\neq 0$.
Finalement j est une racine double de P.

b) P est un polynôme à coefficients réels ; j est racine double de P donc $\bar{j}=j^2$ est une autre racine double de P.

c) On remarque aussi que P est pair. Puisque j et j^2 sont racines doubles de P alors $-j$ et $-j^2$ aussi. Il suit que $(X-j)^2(X-j^2)^2(X+j)^2(X+j^2)^2$ divise P. Or, ces deux polynômes ont même degré et sont unitaires. Ils sont donc égaux.

Exercice n° 7

Soit $P=X^4+8X^3+22X^2+24X+\alpha$. On a $P'=4(X^3+6X^2+1X+6)=4(X+1)(X+2)(X+3)$.
P' n'ayant pas de racine double, P ne peut pas avoir de racine triple.

Exercice n° 8

Pour tout $n\geq 1$ on a $P_n'=P_{n-1}$.
Supposons que α soit racine double de P_n. On a alors $P_n(\alpha)=0$ et $P_n'(\alpha)=0 \iff P_{n-1}(\alpha)=0$. Or, $P_n(\alpha)=P_{n-1}(\alpha)+\frac{\alpha^n}{n!}$ donc $\alpha=0$. Mais $P_n(0)=1$, on a donc une absurdité.
Finalement, P_n ne peut pas avoir de racine double.

Exercice n° 9

Analyse : supposons que $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifie $P \circ P' = P$. Alors soit P est constant, soit $\deg(P) > 0$ et alors, en considérant les degrés dans $P \circ P' = P$ on a :

$$\deg(P \circ P') = \deg(P) \Longleftrightarrow \deg(P)(\deg(P) - 1) = \deg(P) \Longleftrightarrow \deg(P)(\deg(P) - 2) = 0$$

Comme on est dans le cas $\deg(P) > 0$ on a $\deg(P) = 2$ et il existe $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$ tel que $P = aX^2 + bX + c$. On a alors

$$P \circ P' = P \Longleftrightarrow a(2aX + b)^2 + b(2aX + b) + c = aX^2 + bX + c \Longleftrightarrow \begin{cases} 4a^3 = a \\ 4a^2b + 2ab = b \\ ab^2 + b^2 + c = c \end{cases}$$

Comme $a \neq 0$, la première équation donne $a = \pm\frac{1}{2}$ puis la deuxième donne $2ab = 0$ donc $b = 0$. La dernière équation devient $c = c$ qui est toujours vraie.
Le bilan de l'analyse est donc que P est constant ou alors $P = \pm\frac{1}{2}X^2 + c$ avec $c \in \mathbb{K}$.

Synthèse : on vérifie aisément que les polynômes constants ainsi que $\pm\frac{1}{2}X^2 + c$ avec $c \in \mathbb{K}$ vérifient $P \circ P' = P$.

Exercice n° 10

— Soit la division euclidienne de P par $X^2 + 1$: $P = (X^2 + 1)Q + R$: $(\star)$ avec $\deg(R) < 2$.
On a $R \in \mathbb{R}_1[X]$ donc R est de la forme $aX + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
En évaluant $(\star)$ en i on obtient :

$$P(\mathrm{i}) = a\mathrm{i} + b \Longleftrightarrow (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n = a\mathrm{i} + b \Longleftrightarrow \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} = a\mathrm{i} + b \Longleftrightarrow (a, b) = (\sin(n\theta), \cos(n\theta))$$

Finalement $R = \sin(n\theta)X + \cos(n\theta)$.

— Soit la division euclidienne de P par $(X^2 + 1)^2$: $P = (X^2 + 1)^2Q + aX^3 + bX^2 + cX + d$.
On a $P = (X^2 + 1)^2Q + (X^2 + 1)(aX + b) + X(c - a) + d - b$ donc le reste dans la division de P par $X^2 + 1$ est $X(c - a) + d - b = \sin(n\theta)X + \cos(n\theta)$, d'après la question précédente. Il nous reste a et b à déterminer.
On a : $\underbrace{P - \left[(X^2 + 1)(aX + b) + \sin(n\theta)X + \cos(n\theta)\right]}_{= T} = (X^2 + 1)^2Q$ et, en particulier, i est racine double de ce polynôme, qu'on note T.
On a : $T' = n\sin(\theta)(X\sin(\theta) + \cos(\theta))^{n-1} - \left[2X(aX + B) + a(X^2 + 1) + \sin(n\theta)\right]$ et donc :

$$T'(\mathrm{i}) = 0 \Longleftrightarrow n\sin(\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)\theta} - 2\mathrm{i}(a\mathrm{i} + b) - \sin(n\theta) = 0$$

Finalement, $a = -\frac{n\sin(\theta)\cos((n-1)\theta) - \sin(n\theta)}{2}$ et $b = \frac{n\sin(\theta)\sin((n-1)\theta)}{2}$.

Exercice n° 11

Soit $n \geq 2$. On connait toutes les racines de $X^n - 1$: ce sont les racines $n-$ièmes de l'unité. Comme il y en a $n = \deg(X^n - 1)$, on n a $X^n - 1 = \prod_{k=1}^{n}(X - \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}})$. Cette écriture scindée est un produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.
Si on travaille dans $\mathbb{R}[X]$, notons $\omega = \frac{2\mathrm{i}\pi}{n}$, on a $X^n - 1 = \prod_{k=1}^{n}(X - \omega^k)$. Pour $k \in [\![1; n]\!]$, soit ω^k est réel et alors $X - \omega^k$ est un polynôme irréductible de $\mathbb{R}[X]$, soit ω^k est une racine complexe non réelle de $X^n - 1$. Or, ce polynôme est à coefficients réels et donc $\bar{\omega^k} = \omega^{n-k}$ l'est aussi. Reformulons le produit pour mettre cela en évidence :

- si n est pair, $n = 2m$ alors :

$$X^n - 1 = (X + 1)(X - 1)\prod_{k=1}^{m-1}(X - \omega^k)(X - \bar{\omega}^k) = (X + 1)(X - 1)\prod_{k=1}^{m-1}(X^2 - 2XRe(\omega^k) + 1)$$

Chaque $X^2 - 2XRe(\omega^k) + 1 = X^2 - 2\cos(\frac{2k\pi}{n} + 1)$ est irréductible (ses racines sont non-réelles).
Le produit de $X^n - 1$ en produit de facteurs irréductibles est donc :

$$X^n - 1 = (X+1)(X-1)\prod_{k=1}^{m-1}\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + 1\right)$$

- De façon analogue, si n est impair, $n = 2m+1$ alors :

$$X^n - 1 = (X-1)\prod_{k=1}^{m}\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + 1\right)$$

Exercice n° 12

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $2n > 0$. P' est donc un polynôme de degré impair et, d'après le TVI, il admet au moins une racine réelle α. On pose $\lambda = -P(\alpha)$ et $T = P + \lambda$.
On a $T(\alpha) = T'(\alpha) = 0$ et donc α est racine de T dont la multiplicité est au moins 2.

Exercice n° 13

On a : $X^4 + 1 = X^4 + 2X^2 + 1 - 2X^2 = (X^2+1)^2 - 2X^2 = (X^2 + \sqrt{2}X + 1)(X^2 - \sqrt{2}X + 1)$ et c'est un produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$ (leurs discriminants valent -2).
Il suit qu'il existe des réels a, b, c, d tels que $\dfrac{1}{X^4+1} = \dfrac{aX+b}{X^2+\sqrt{2}X+1} + \dfrac{cX+d}{X^2-\sqrt{2}X+1}$.
Après calculs, on trouve : $\dfrac{1}{X^4+1} = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{2}}X + \frac{1}{2}}{X^2+\sqrt{2}X+1} + \dfrac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}X + \frac{1}{2}}{X^2-\sqrt{2}X+1}$.

Exercice n° 14

Pour ces deux calculs, il s'agit de faire une décomposition en éléments simples préalablement.
On a : $\forall k \geq 1,\ \frac{1}{k^2+k} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ et donc :

$$\sum_{k=1}^{1000}\frac{1}{k^2+k} = \sum_{k=1}^{1000}\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{1000}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{1000}\frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{1000}\frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{1001}\frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{1001}$$

On a : $X^3 + 3X^2 - 4X - 2 = (X-2)(X+2)(X+3)$ et $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-2; 2; -3\}$

$$\frac{3x+2}{x^3+3x^2-4x-12} = \frac{\frac{2}{/}5}{x-2} + \frac{1}{x+2} + \frac{-\frac{7}{5}}{x+3}$$

Il suit que :

$$\int_0^1 \frac{3x+2}{x^3+3x^2-4x-12}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{5}\ln|x-2| + \ln(x+2) - \frac{7}{5}\ln(x+3)\right]_0^1 = -\frac{2}{5}\ln(2) + \ln(\frac{3}{2}) + \frac{7}{5}\ln(\frac{3}{4})$$

3 Démontrer les résultats du cours

Exercice n° 15

C'est une récurrence qui ressemble à la preuve de la formule du binôme de Newton.

4 Plus difficile...

Exercice n° 16

a) On a : $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos^2(x) = \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}$ et $\cos^3(x) = \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x)$.

b) On a : $P(\alpha) = 8\cos^3(\frac{2\pi}{7}) + 4\cos^2(\frac{2\pi}{7}) - 4\cos(\frac{2\pi}{7}) - 1$. En utilisant la question précédente, il vient :$P(\alpha) = 2\cos(\frac{6\pi}{7}) + 2\cos(\frac{4\pi}{7}) + 2\cos(\frac{2\pi}{7}) + 1$.
Par parité de cos on a : $P(\alpha) = \cos(\frac{6\pi}{7}) + \cos(-\frac{6\pi}{7}) + \cos(\frac{4\pi}{7}) + \cos(-\frac{4\pi}{7}) + \cos(\frac{2\pi}{7}) + \cos(-\frac{2\pi}{7}) + 1$.
Puis, en utilisant la $2\pi-$périodicité :

$$P(\alpha) = \cos\left(\frac{6\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{10\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{12\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{14\pi}{7}\right)$$

Finalement, $P(\alpha) = Re\left(\sum_{k=1}^{7} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi/7}\right) = 0$ d'après les propriétés des racines 7è de l'unité.

Exercice n° 17

Soit A, B, C des polynômes non constants de $\mathbb{K}[X]$. Pour prouver que si $A \circ C | B \circ C$ alors $A|B$ on va **raisonner par contraposée** et montrer que si $A \nmid B$ alors $A \circ C \nmid B \circ C$.

Supposons que A ne divise pas B, c'est-à-dire que la division euclidienne de B par A s'écrit $B = AQ+R$ avec $R \neq 0$ et $\deg(R) < \deg(A)$.
Alors, $B \circ C = (AQ) \circ C + R \circ C = \underbrace{(A \circ C)(Q \circ C) + R \circ C}_{(\star)}$.
Comme C n'est pas constant, $\deg(R \circ C) = \deg(R)\deg(C)$ et $\deg(A \circ C) = \deg(A)\deg(C)$ et donc $\deg(R \circ C) < \deg(A \circ C)$. Il suit que $(\star)$ est la division euclidienne de $B \circ C$ par $A \circ C$.
Son reste est $R \circ C$ qui n'est pas nul puisque $R \neq 0$ et que C n'est pas constant.
On a donc $A \circ C \nmid B \circ C$ et, par contraposée, si $A \circ C \mid B \circ C$ alors $A \mid B$.

Exercice n° 18

Analyse : supposons que $P \in \mathbb{K}[X]$ vérifie $P'|P$. Déjà, P ne peut pas être constant car on aurait $P' = 0$. Soit $n > 0$ le degré de P.
$\deg(P') = n - 1$ et $P' \mid P$ implique l'existence de $(\lambda, \alpha) \in \mathbb{K}^2$ tel que $P = \lambda(X - \alpha)P'$. En considérant les coefficients dominants de P et de P', on a $\lambda = \frac{1}{n}$ et donc $P = \frac{1}{n}(X - \alpha)P'$.
La formule de Taylor appliquée à P en α donne $P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X - \alpha)^k$.
En dérivant terme à terme on obtient $P' = \sum_{k=1}^{n} \frac{kP^{(k)}(\alpha)}{k!}(X - \alpha)^{k-1}$ et donc :

$$\frac{1}{n}(X - \alpha)P' = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{kP^{(k)}(\alpha)}{k!}(X - \alpha)^k = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \frac{kP^{(k)}(\alpha)}{k!}(X - \alpha)^k$$

On a alors :

$$P = \frac{1}{n}(X - \alpha)P' \iff P - \frac{1}{n}(X - \alpha)P' = 0 \iff \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X - \alpha)^k \left(1 - \frac{k}{n}\right) = 0$$

Chaque terme de la somme est un polynôme de degré k, leur somme est donc nulle si, et seulement si, ils sont tous nuls.
Pour $k \neq n$ on a $1 - \frac{k}{n} \neq 0$ et donc $P^k(\alpha) = 0$ et donc α est racine d'ordre n de P. Il suit que $P = \mu(X - \alpha)^n$ avec $\mu \in \mathbb{K}^*$.

Synthèse : si $P = \mu(X - \alpha)^n$ avec $\mu \in \mathbb{K}^*$ alors $P' = n\mu(X - \alpha)^{n-1}$ et $P'|P$.