

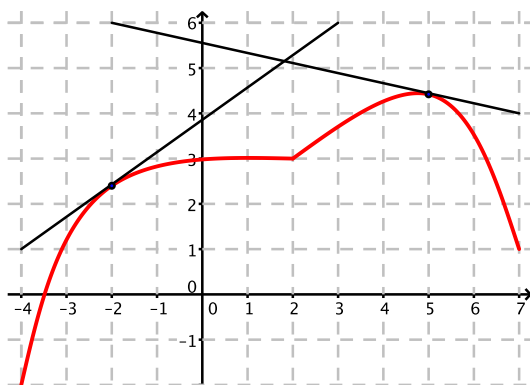
Chapitre 12 - Dérivation - Exercices

1 Applications directes du cours

Exercice n° 1

Dérivabilité.

1. On considère la fonction f représentée ci-dessous. (Lorsque les valeurs lues semblent entières, on considère qu'elles le sont).



- a) Déterminer les domaines de définition et de dérivabilité de f .
b) Lire $f(0)$, $f(-4)$, $f'(-2)$ et $f'(5)$.

2. Etudier la dérivabilité de $x \mapsto \frac{1}{x}$.

3. Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ x^3 & \text{si } x < 0 \end{cases} ; g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases} ; h(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ \sin x & \text{si } x > 0 \end{cases} ; i(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

4. Après avoir justifié de sa dérivabilité sur \mathbb{R} , déterminer la fonction dérivée de $x \mapsto (x^2 + 1)^{\cos x}$.
5. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Après avoir justifié que $x \mapsto x^\alpha$ est définie et de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^{+*} , déterminer sa dérivée d'ordre n ($n \in \mathbb{N}$).
6. La fonction $x \mapsto x^3 \sin \frac{1}{x}$ peut-elle être prolongée en une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} ?
7. La fonction $x \mapsto x^2 \cos \frac{1}{x}$ peut-elle être prolongée en une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} ?
8. La fonction $x \mapsto x^x$ peut-elle être prolongée en une fonction dérivable sur \mathbb{R}^+ ?

Exercice n° 2

Applications de la dérivation.

1. Déterminer les extrema de $f(x) = x^4 - x^3 + 1$ sur $[-1; 1]$.
2. Donner le DL1 de $x \mapsto \sqrt{x}$ en 4. En déduire une valeur approchée de $\sqrt{3,96}$.
3. Soit $f \in \mathcal{C}^3([0; 1])$ et qui vérifie $f(0) = f'(0) = f(1) = f'(1) = 0$. Prouver qu'il existe $\alpha \in]0; 1[$ tel que $f^{(3)}(\alpha) = 0$.
4. Soit f une fonction définie et dérivable sur \mathbb{R} qui vérifie $f(3) = 5$ et $|f'| < 2$. Donner un encadrement pour $f(0)$.
5. Prouver que, pour tout $x > 0$, on a : $\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$.
6. Prouver que, pour tous réels a et b on a : $e^{\frac{a+b}{2}} \leq \frac{e^a + e^b}{2}$.

2 Vrai ou faux sur l'ensemble du chapitre

f désigne une fonction, définie et dérivable sur \mathcal{D}_f . a est un point intérieur de \mathcal{D}_f (c'est-à-dire qu'il existe un intervalle ouvert inclus dans \mathcal{D}_f qui contient a).

- a) Si f' est de signe constant sur \mathcal{D}_f alors f est monotone sur \mathcal{D}_f .
- b) Si f est monotone sur \mathcal{D}_f alors f' est de signe constant sur \mathcal{D}_f .
- c) Si f admet un extremum local en a alors $f'(a) = 0$.
- d) Si $f'(a) = 0$ alors f admet un extremum local en a .
- e) Le théorème de Rolle est valable pour les fonctions réelles à valeurs complexes.
- f) Le théorème des accroissements finis est valable pour les fonctions réelles à valeurs complexes.
- g) L'inégalité des accroissements finis est valable pour les fonctions réelles à valeurs complexes.
- h) Il existe des fonctions convexes non dérivables.
- i) Il existe des fonctions convexes et concaves.
- j) Si f est lipschitzienne sur l'intervalle I alors f est continue sur I .

3 Un peu plus dur

Exercice n° 3

Etudier la dérivabilité de $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$

Exercice n° 4

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^3 \operatorname{Arcsin}(x)}$.

- a) Donner le domaine de définition de f .
- b) Etudier la dérivabilité de f en 0.
- c) Pouvait-on aboutir à ce résultat par opérations?

Exercice n° 5

Soit la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (x - 1)^3 + 2$.

- a) Justifier l'existence d'une bijection réciproque f^{-1} dont on précisera le domaine de définition.
- b) Etudier la dérivabilité de f^{-1} sur \mathbb{R} .

Exercice n° 6

Soit la fonction $f(x) = x^2 \left(1 + \cos^2\left(\frac{1}{x}\right) \right)$.

1. Justifier qu'on peut prolonger f par continuité en 0 et qu'alors f admet un minimum en 0.
2. À l'aide de Geogebra, observer que f n'est ni localement décroissante à gauche en 0, ni localement croissante à droite en 0.

Nous avons observé dans les exercices 4 à 7 :

- une fonction continue mais qui n'est dérivable ni à gauche, ni à droite, en un point ;
- une fonction dont la dérivabilité en un point n'est pas prédite par les formules de calcul sur les dérivées (qui permettent de prouver simplement la dérivabilité mais pas la non-dérivabilité) ;
- une fonction dérivable et bijective dont la réciproque n'est pas dérivable partout à cause de points d'annulation de la dérivée.
Géométriquement, si la courbe de f admet une tangente horizontale alors la courbe de f^{-1} qui est déduite de celle de f par symétrie orthogonale d'axe $x = y$ admet une tangente verticale (ce qui prouve la non-dérivabilité de f^{-1} en ce point).
- Une fonction qui admet un minimum global en un point sans que la fonction soit localement décroissante à gauche et croissante à droite en ce point.

Exercice n° 7

Calculer les dérivées n -ièmes des fonctions :

$$\cos \quad ; \quad \sin \quad ; \quad f(x) = \ln(3x+1) \quad ; \quad g(x) = x^2(1+x)^n \quad ; \quad h(x) = \cos(x)\sin(x)$$

Exercice n° 8

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en 2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{xf(2) - 2f(x)}{x-2}$

Exercice n° 9

Etudier les variations de $x \mapsto \sin(x) - x + \frac{x^3}{6}$.

Exercice n° 10

Déterminer le minimum de $x \mapsto x^3 + x^{-2}$ sur $]0; 1]$.

Exercice n° 11

Prouver que $\forall x \geq 0, x \leq e^x - 1 \leq xe^x$.

Exercice n° 12

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que si $f(x) = 0$ admet $k+1$ solutions alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f^{(k)}(\alpha) = 0$.

Exercice n° 13

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $n > 1$ un entier et $P_n(x) = x^n + ax + b$.
Prouver que P admet au maximum trois racines réelles.

Exercice n° 14

Prouver que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |\operatorname{Arctan} x - \operatorname{Arctan} y| \leq |x - y|$.

Exercice n° 15

Soit la suite u définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \frac{1}{4} \sin(\frac{1}{u_n})$. On note pour tout $x \neq 0, f(x) = 1 + \frac{1}{4} \sin(\frac{1}{x})$.

1. Prouver que $f(\mathbb{R}^*)$ est un intervalle qu'on notera I .
2. Justifier que I est stable par f , en déduire que u est bien définie.
3. Prouver que f admet un point fixe qu'on notera α .
4. Démontrer que $\forall x \in I, |f'(x)| \leq \frac{4}{9}$.
5. En déduire que u converge vers α .

Exercice n° 16

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et a_1, \dots, a_n des réels dont la somme est nulle.

Justifier qu'il existe un réel $b \in]0; 1[$ tel que $\sum_{k=1}^n ka_k b^{k-1} = 0$.

Exercice n° 17

Soit $n \geq 2$. Démontrer que $\forall x \in [-1; +\infty[, (1+x)^n \geq 1+nx$.

4 Démontrer les résultats du cours et exercices théoriques

Exercice n° 18

Démontrer la formule de dérivation d'une composée. (On pourra utiliser une définition alternative de la dérivation qui a été vue en cours).

Exercice n° 19

Démontrer le Théorème de la limite de la dérivée.

Exercice n° 20

Soit f , une fonction définie et dérivable sur un intervalle I . Supposons que $f' > 0$ sur I .
Prouver que f est strictement croissante sur I .

Exercice n° 21

Généraliser le théorème de Rolle aux fonctions définies et dérivables sur \mathbb{R} qui ont la même limite finie en $-\infty$ et en $+\infty$.

Exercice n° 22

Soit $n \geq 2$. Montrer que la fonction f est convexe sur \mathbb{R} si, et seulement si, pour tous réels a_1, \dots, a_n et tous nombres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de $[0; 1]$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ on a : $\sum_{i=1}^n \lambda_i f(a_i) \geq f(\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i)$.

5 Plus difficile...

Exercice n° 23

Soit $f : [0; a] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 telle que $f(0) = 0$.

Montrer qu'il existe $c \in]0; a]$ tel que $f'(c) = \frac{2f(a) + af'(a)}{3a}$.

Exercice n° 24

1. Prouver que $f(x) = \ln(1 + e^x)$ est convexe sur \mathbb{R} .

2. Justifier que pour tous réels a_1, \dots, a_n strictement positifs on a : $1 + \left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\prod_{i=1}^n (1 + a_i)\right)^{\frac{1}{n}}$.

3. En déduire que si $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ sont des réels strictement positifs, on a :

$$\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{i=1}^n y_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\prod_{i=1}^n (x_i + y_i)\right)^{\frac{1}{n}}$$

Exercice n° 25

Soit a_1, \dots, a_n des réels strictement positifs. Prouver que : $\sqrt[n]{a_1 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$.

Exercice n° 26

Soit $a > 0$, f et g deux fonctions continues sur $[0; a]$, de classe \mathcal{C}^1 sur $]0; a]$, qui vérifient $f(0) = g(0) = 0$ et telles que g et g' ne s'annulent pas sur $]0; a]$.

a) Soit $x \in]0; a]$. Appliquer le théorème de Rolle à $t \mapsto f(x)g(t) - f(t)g(x)$.

b) En déduire que si $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe alors $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ existe aussi et que ces limites sont égales.

(Ce dernier résultat s'appelle Règle de l'Hospital).