

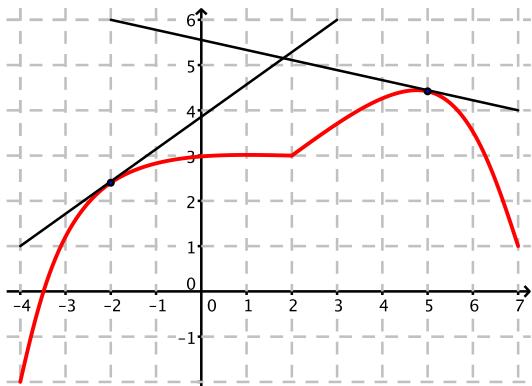
# Chapitre 12 - Dérivation - Exercices

## 1 Applications directes du cours

### Exercice n° 1

Dérivabilité.

1. On considère la fonction  $f$  représentée ci-dessous. (Lorsque les valeurs lues semblent entières, on considère qu'elles le sont).



- a) Déterminer les domaines de définition et de dérivabilité de  $f$ .
- b) Lire  $f(0)$ ,  $f(-4)$ ,  $f'(-2)$  et  $f'(5)$ .

2. Etudier la dérivabilité de  $x \mapsto \frac{1}{x}$ .

3. Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ x^3 & \text{si } x < 0 \end{cases} ; \quad g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases} ; \quad h(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ \sin x & \text{si } x > 0 \end{cases} ; \quad i(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

4. Après avoir justifié de sa dérivabilité sur  $\mathbb{R}$ , déterminer la fonction dérivée de  $x \mapsto (x^2 + 1)^{\cos x}$ .

5. Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Après avoir justifié que  $x \mapsto x^\alpha$  est définie et de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$ , déterminer sa dérivée d'ordre  $n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

6. La fonction  $x \mapsto x^3 \sin \frac{1}{x}$  peut-elle être prolongée en une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  ?

7. La fonction  $x \mapsto x^2 \cos \frac{1}{x}$  peut-elle être prolongée en une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  ?

8. La fonction  $x \mapsto x^x$  peut-elle être prolongée en une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}^+$  ?

### Exercice n° 2

Applications de la dérivation.

1. Déterminer les extrema de  $f(x) = x^4 - x^3 + 1$  sur  $[-1; 1]$ .

2. Donner le DL1 de  $x \mapsto \sqrt{x}$  en 4. En déduire une valeur approchée de  $\sqrt{3,96}$ .

3. Soit  $f \in \mathcal{C}^3([0; 1])$  et qui vérifie  $f(0) = f'(0) = f(1) = f'(1) = 0$ . Prouver qu'il existe  $\alpha \in ]0; 1[$  tel que  $f^{(3)}(\alpha) = 0$ .

4. Soit  $f$  une fonction définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  qui vérifie  $f(3) = 5$  et  $|f'| < 2$ . Donner un encadrement pour  $f(0)$ .

5. Prouver que, pour tout  $x > 0$ , on a :  $\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$ .

6. Prouver que, pour tous réels  $a$  et  $b$  on a :  $e^{\frac{a+b}{2}} \leq \frac{e^a + e^b}{2}$ .

## 2 Vrai ou faux sur l'ensemble du chapitre

$f$  désigne une fonction, définie et dérivable sur  $\mathcal{D}_f$ .  $a$  est un point intérieur de  $\mathcal{D}_f$  (c'est-à-dire qu'il existe un intervalle ouvert inclus dans  $\mathcal{D}_f$  qui contient  $a$ ).

- a) Si  $f'$  est de signe constant sur  $\mathcal{D}_f$  alors  $f$  est monotone sur  $\mathcal{D}_f$ .
- b) Si  $f$  est monotone sur  $\mathcal{D}_f$  alors  $f'$  est de signe constant sur  $\mathcal{D}_f$ .
- c) Si  $f$  admet un extremum local en  $a$  alors  $f'(a) = 0$ .
- d) Si  $f'(a) = 0$  alors  $f$  admet un extremum local en  $a$ .
- e) Le théorème de Rolle est valable pour les fonctions réelles à valeurs complexes.
- f) Le théorème des accroissements finis est valable pour les fonctions réelles à valeurs complexes.
- g) L'inégalité des accroissements finis est valable pour les fonctions réelles à valeurs complexes.
- h) Il existe des fonctions convexes non dérivables.
- i) Il existe des fonctions convexes et concaves.
- j) Si  $f$  est lipschitzienne sur l'intervalle  $I$  alors  $f$  est continue sur  $I$ .

## 3 Un peu plus dur

### Exercice n° 3

Etudier la dérivabilité de  $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$

### Exercice n° 4

On considère la fonction  $f : x \mapsto \sqrt{x^3 \operatorname{Arcsin}(x)}$ .

- a) Donner le domaine de définition de  $f$ .
- b) Etudier la dérivabilité de  $f$  en 0.
- c) Pouvait-on aboutir à ce résultat par opérations ?

### Exercice n° 5

Soit la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = (x - 1)^3 + 2$ .

- a) Justifier l'existence d'une bijection réciproque  $f^{-1}$  dont on précisera le domaine de définition.
- b) Etudier la dérivabilité de  $f^{-1}$  sur  $\mathbb{R}$ .

### Exercice n° 6

Soit la fonction  $f(x) = x^2 \left(1 + \cos^2\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ .

1. Justifier qu'on peut prolonger  $f$  par continuité en 0 et qu'alors  $f$  admet un minimum en 0.
2. À l'aide de Geogebra, observer que  $f$  n'est ni localement décroissante à gauche en 0, ni localement croissante à droite en 0.

Nous avons observé dans les exercices 4 à 7 :

- une fonction continue mais qui n'est dérivable ni à gauche, ni à droite, en un point ;
- une fonction dont la dérivabilité en un point n'est pas prédite par les formules de calcul sur les dérivées (qui permettent de prouver simplement la dérivabilité mais pas la non-dérivabilité) ;
- une fonction dérivable et bijective dont la réciproque n'est pas dérivable partout à cause de points d'annulation de la dérivée.

Géométriquement, si la courbe de  $f$  admet une tangente horizontale alors la courbe de  $f^{-1}$  qui est déduite de celle de  $f$  par symétrie orthogonale d'axe  $x = y$  admet une tangente verticale (ce qui prouve la non-dérivabilité de  $f^{-1}$  en ce point).

- Une fonction qui admet un minimum global en un point sans que la fonction soit localement décroissante à gauche et croissante à droite en ce point.

---

**Exercice n° 7** \_\_\_\_\_

Calculer les dérivées  $n$ -ièmes des fonctions :

$$\cos ; \sin ; f(x) = \ln(3x + 1) ; g(x) = x^2(1 + x)^n ; h(x) = \cos(x) \sin(x)$$

---

**Exercice n° 8** \_\_\_\_\_

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable en 2. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{xf(2) - 2f(x)}{x - 2}$

---

**Exercice n° 9** \_\_\_\_\_

Etudier les variations de  $x \mapsto \sin(x) - x + \frac{x^3}{6}$ .

---

**Exercice n° 10** \_\_\_\_\_

Déterminer le minimum de  $x \mapsto x^3 + x^{-2}$  sur  $]0; 1]$ .

---

**Exercice n° 11** \_\_\_\_\_

Prouver que  $\forall x \geq 0$ ,  $x \leq e^x - 1 \leq xe^x$ .

---

**Exercice n° 12** \_\_\_\_\_

Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Montrer que si  $f(x) = 0$  admet  $k + 1$  solutions alors il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $f^{(k)}(\alpha) = 0$ .

---

**Exercice n° 13** \_\_\_\_\_

Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,  $n > 1$  un entier et  $P_n(x) = x^n + ax + b$ .

Prouver que  $P$  admet au maximum trois racines réelles.

---

**Exercice n° 14** \_\_\_\_\_

Prouver que  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $|\text{Arctan } x - \text{Arctan } y| \leq |x - y|$ .

---

**Exercice n° 15** \_\_\_\_\_

Soit la suite  $u$  définie par  $u_0 = 2$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{4} \sin(\frac{1}{u_n})$ . On note pour tout  $x \neq 0$ ,  $f(x) = 1 + \frac{1}{4} \sin(\frac{1}{x})$ .

1. Prouver que  $f(\mathbb{R}^*)$  est un intervalle qu'on notera  $I$ .
2. Justifier que  $I$  est stable par  $f$ , en déduire que  $u$  est bien définie.
3. Prouver que  $f$  admet un point fixe qu'on notera  $\alpha$ .
4. Démontrer que  $\forall x \in I$ ,  $|f'(x)| \leq \frac{4}{9}$ .
5. En déduire que  $u$  converge vers  $\alpha$ .

---

**Exercice n° 16** \_\_\_\_\_

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $a_1, \dots, a_n$  des réels dont la somme est nulle.

Justifier qu'il existe un réel  $b \in ]0; 1[$  tel que  $\sum_{k=1}^n k a_k b^{k-1} = 0$ .

---

**Exercice n° 17** \_\_\_\_\_

Soit  $n \geq 2$ . Démontrer que  $\forall x \in [-1; +\infty[, (1 + x)^n \geq 1 + nx$ .

## 4 Démontrer les résultats du cours et exercices théoriques

---

**Exercice n° 18** \_\_\_\_\_

Démontrer la formule de dérivation d'une composée. (On pourra utiliser une définition alternative de la dérivation qui a été vue en cours).

---

**Exercice n° 19** 

---

Démontrer le Théorème de la limite de la dérivée.

---

**Exercice n° 20** 

---

Soit  $f$ , une fonction définie et dérivable sur un intervalle  $I$ . Supposons que  $f' > 0$  sur  $I$ .  
Prouver que  $f$  est strictement croissante sur  $I$ .

---

**Exercice n° 21** 

---

Généraliser le théorème de Rolle aux fonctions définies et dérivables sur  $\mathbb{R}$  qui ont la même limite finie en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .

---

**Exercice n° 22** 

---

Soit  $n \geq 2$ . Montrer que la fonction  $f$  est convexe sur  $\mathbb{R}$  si, et seulement si, pour tous réels  $a_1, \dots, a_n$  et tous nombres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  de  $[0; 1]$  tels que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$  on a :  $\sum_{i=1}^n \lambda_i f(a_i) \geq f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i\right)$ .

## 5 Plus difficile...

---

**Exercice n° 23** 

---

Soit  $f : [0; a] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que  $f(0) = 0$ .  
Montrer qu'il existe  $c \in ]0; a]$  tel que  $f'(c) = \frac{2f(a) + af'(a)}{3a}$ .

---

**Exercice n° 24** 

---

1. Prouver que  $f(x) = \ln(1 + e^x)$  est convexe sur  $\mathbb{R}$ .

2. Justifier que pour tous réels  $a_1, \dots, a_n$  strictement positifs on a :  $1 + \left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\prod_{i=1}^n (1 + a_i)\right)^{\frac{1}{n}}$ .

3. En déduire que si  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$  sont des réels strictement positifs, on a :

$$\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{i=1}^n y_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\prod_{i=1}^n (x_i + y_i)\right)^{\frac{1}{n}}$$

---

**Exercice n° 25** 

---

Soit  $a_1, \dots, a_n$  des réels strictement positifs. Prouver que :  $\sqrt[n]{a_1 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$ .

---

**Exercice n° 26** 

---

Soit  $a > 0$ ,  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur  $[0; a]$ , de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0; a]$ , qui vérifient  $f(0) = g(0) = 0$  et telles que  $g$  et  $g'$  ne s'annulent pas sur  $]0; a]$ .

a) Soit  $x \in ]0; a]$ . Appliquer le théorème de Rolle à  $t \mapsto f(x)g(t) - f(t)g(x)$ .

b) En déduire que si  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  existe alors  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$  existe aussi et que ces limites sont égales.  
(Ce dernier résultat s'appelle Règle de l'Hospital).