Chapitre 12 - Dérivation - Exercices

Exercice n° 1

VRAI ou FAUX sur l'ensemble du chapitre.
f désigne une fonction, définie et dérivable sur $\mathcal{D}_f$. a est un point intérieur de $\mathcal{D}_f$ (c'est-à-dire qu'il existe un intervalle ouvert inclus dans $\mathcal{D}_f$ qui contient a).

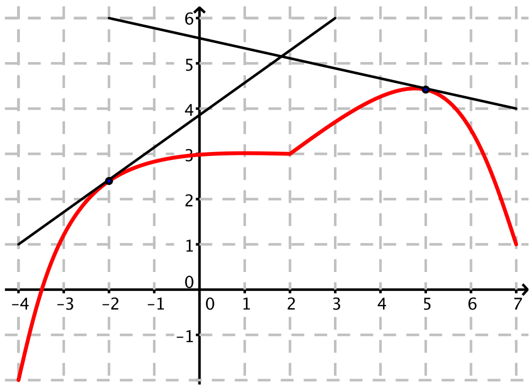
a) Si f' est de signe constant sur $\mathcal{D}_f$ alors f est monotone sur $\mathcal{D}_f$.
b) Si f est monotone sur $\mathcal{D}_f$ alors f' est de signe constant sur $\mathcal{D}_f$.
c) Si f admet un extremum local en a alors $f'(a) = 0$.
d) Si $f'(a) = 0$ alors f admet un extremum local en a.
e) Le théorème de Rolle est valable pour les fonctions réelles à valeurs complexes.
f) Le théorème des accroissements finis est valable pour les fonctions réelles à valeurs complexes.
g) L'inégalité des accroissements finis est valable pour les fonctions réelles à valeurs complexes.
h) Il existe des fonctions convexes non dérivables.
i) Il existe des fonctions convexes et concaves.
j) Si f est lipschitzienne sur l'intervalle I alors f est continue sur I.

1 Applications directes du cours

Exercice n° 2

Dérivabilité.

1. On considère la fonction f représentée ci-dessous. (Lorsque les valeurs lues semblent entières, on considère qu'elles le sont).



a) Déterminer les domaines de définition et de dérivabilité de f.
b) Lire $f(0)$, $f(-4)$, $f'(-2)$ et $f'(5)$.

2. Etudier la dérivabilité de $x \longmapsto \frac{1}{x}$.
3. Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ si } x \geq 0 \\ x^3 \text{ si } x < 0 \end{cases} ;\ g(x) = \begin{cases} x^2 \text{ si } x < 0 \\ x \text{ si } x \geq 0 \end{cases} ;\ h(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \leq 0 \\ \sin x \text{ si } x > 0 \end{cases} ;\ i(x) = \begin{cases} x^2 - 3 \text{ si } x < 0 \\ x^2 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

4. Après avoir justifié de sa dérivabilité sur $\mathbb{R}$, déterminer la fonction dérivée de $x \mapsto (x^2+1)^{\cos x}$.
5. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Après avoir justifié que $x \mapsto x^\alpha$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, déterminer sa dérivée d'ordre n ($n \in \mathbb{N}$).
6. La fonction $x \mapsto x^3 \sin \frac{1}{x}$ peut-elle être prolongée en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?
7. La fonction $x \mapsto x^2 \cos \frac{1}{x}$ peut-elle être prolongée en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?
8. La fonction $x \mapsto x^x$ peut-elle être prolongée en une fonction de dérivable sur $\mathbb{R}^+$?

Exercice n° 3

Applications de la dérivation.

1. Déterminer les extrema de $f(x) = x^4 - x^3 + 1$ sur $[-1; 1]$.
2. Donner le DL1 de $x \mapsto \sqrt{x}$ en 4. En déduire une valeur approchée de $\sqrt{3,96}$.
3. Soit $f \in \mathcal{C}^3([0;1])$ et qui vérifie $f(0) = f'(0) = f(1) = f'(1) = 0$. Prouver qu'il existe $\alpha \in]0;1[$ tel que $f^{(3)}(\alpha) = 0$.
4. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $f(3) = 5$ et $|f'| < 2$. Donner un encadrement pour $f(0)$.
5. Prouver que, pour tout $x > 0$, on a : $\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$.
6. Prouver que, pour tous réels a et b on a : $\mathrm{e}^{\frac{a+b}{2}} \leq \frac{\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^b}{2}$.

2 Un peu plus dur

Exercice n° 4

Etudier la dérivabilité de $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ x \sin \frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \end{cases}$

Exercice n° 5

On considère la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x^3 \text{Arcsin}(x)}$.

a) Donner le domaine de définition de f.

b) Etudier la dérivabilité de f en 0.

c) Pouvait-on aboutir à ce résultat par opérations ?

Exercice n° 6

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)^3 + 2$.

a) Justifier l'existence d'une bijection réciproque f^{-1} dont on précisera le domaine de définition.

b) Etudier la dérivabilité de f^{-1} sur $\mathbb{R}$.

Exercice n° 7

Soit la fonction $f(x) = x^2 \left(1 + \cos^2(\frac{1}{x})\right)$.

1. Justifier qu'on peut prolonger f par continuité en 0 et qu'alors f admet un minimum en 0.
2. À l'aide de Geogebra, observer que f n'est ni localement décroissante à gauche en 0, ni localement croissante à droite en 0.

Nous avons observé dans les exercices 4 à 7 :

- une fonction continue mais qui n'est dérivable ni à gauche, ni à droite, en un point ;
- une fonction dont la dérivabilité en un point n'est pas prédite par les formules de calcul sur les dérivées (qui permettent de prouver simplement la dérivabilité mais pas la non-dérivabilité) ;
- une fonction dérivable et bijective dont la réciproque n'est pas dérivable partout à cause de points d'annulation de la dérivée.
  Géométriquement, si la courbe de f admet une tangente horizontale alors la courbe de f^{-1} qui est déduite de celle de f par symétrie orthogonale d'axe $x = y$ admet une tangente verticale (ce qui prouve la non-dérivabilité de f^{-1} en ce point).
- Une fonction qui admet un minimum global en un point sans que la fonction soit localement décroissante à gauche et croissante à droite en ce point.

Exercice n° 8

Calculer les dérivées n-ièmes des fonctions :

$$\cos \quad ; \quad \sin \quad ; \quad f(x) = \ln(3x+1) \quad ; \quad g(x) = x^2(1+x)^n \quad ; \quad h(x) = \cos(x)\sin(x)$$

Exercice n° 9

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en 2. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{xf(2) - 2f(x)}{x-2}$

Exercice n° 10

Etudier les variations de $x \mapsto \sin(x) - x + \frac{x^3}{6}$.

Exercice n° 11

Déterminer le minimum de $x \longmapsto x^3 + x^{-2}$ sur $]0;1]$.

Exercice n° 12

Prouver que $\forall x \geq 0,\ x \leq \mathrm{e}^x - 1 \leq x\mathrm{e}^x$.

Exercice n° 13

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que si $f(x) = 0$ admet $k+1$ solutions alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f^{(k)}(\alpha) = 0$.

Exercice n° 14

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $n > 1$ un entier et $P_n(x) = x^n + ax + b$.
Prouver que P admet au maximum trois racines réelles.

Exercice n° 15

Prouver que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |\mathrm{Arctan}\ x - \mathrm{Arctan}\ y| \leq |x-y|$.

Exercice n° 16

Soit la suite u définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 + \frac{1}{4}\sin(\frac{1}{u_n})$. On note pour tout $x \neq 0$, $f(x) = 1 + \frac{1}{4}\sin(\frac{1}{x})$.

1. Prouver que $f(\mathbb{R}^*)$ est un intervalle qu'on notera I.
2. Justifier que I est stable par f, en déduire que u est bien définie.
3. Prouver que f admet un point fixe qu'on notera α.
4. Démontrer que $\forall x \in I,\ |f'(x)| \leq \frac{4}{9}$.
5. En déduire que u converge vers α.

Exercice n° 17

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n$ des réels dont la somme est nulle.
Justifier qu'il existe un réel $b \in]0;1[$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ka_k b^{k-1} = 0$.

Exercice n° 18

Soit $n \geq 2$. Démontrer que $\forall x \in [-1;+\infty[,\ (1+x)^n \geq 1 + nx$.

3 Démontrer les résultats du cours et exercices théoriques

Exercice n° 19

Démontrer la formule de dérivation d'une composée. (On pourra utiliser une définition alternative de la dérivation qui a été vue en cours).

Exercice n° 20

Démontrer le Théorème de la limite de la dérivée.

Exercice n° 21

Soit f, une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Supposons que $f' > 0$ sur I.
Prouver que f est strictement croissante sur I.

Exercice n° 22

Généraliser le théorème de Rolle aux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ qui ont la même limite finie en $-\infty$ et en $+\infty$.

Exercice n° 23

Soit $n \geq 2$. Montrer que la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, pour tous réels $a_1, \ldots, a_n$ et tous nombres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de $[0;1]$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ on a : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(a_i) \geq f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i)$.

4 Plus difficile...

Exercice n° 24

Soit $f : [0;a] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = 0$.
Montrer qu'il existe $c \in]0;a]$ tel que $f'(c) = \dfrac{2f(a) + af'(a)}{3a}$.

Exercice n° 25

1. Prouver que $f(x) = \ln(1 + \mathrm{e}^x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que pour tous réels $a_1, \ldots, a_n$ strictement positifs on a : $1 + \left(\displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\displaystyle\prod_{i=1}^{n} (1 + a_i)\right)^{\frac{1}{n}}$.
3. En déduire que si $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ sont des réels strictement positifs, on a :

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{i=1}^{n} y_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\prod_{i=1}^{n} (x_i + y_i)\right)^{\frac{1}{n}}$$

Exercice n° 26

Soit $a_1, \ldots, a_n$ des réels strictement positifs. Prouver que : $\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \leq \dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$.

Exercice n° 27

Soit $a > 0$, f et g deux fonctions continues sur $[0;a]$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;a]$, qui vérifient $f(0) = g(0) = 0$ et telles que g et g' ne s'annulent pas sur $]0;a]$.

a) Soit $x \in]0;a]$. Appliquer le théorème de Rolle à $t \longmapsto f(x)g(t) - f(t)g(x)$.

b) En déduire que si $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe alors $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ existe aussi et que ces limites sont égales.
(Ce dernier résultat s'appelle Règle de l'Hospital).