Correction des exercices du chapitre 12

Exercice n° 1

a) Faux. $f(x) = \frac{1}{x}$ n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$ alors que $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) < 0$.

b) Vrai. Supposons que f soit croissante sur $\mathcal{D}_f$ alors f est croissante sur tout intervalle $I \subset \mathcal{D}_f$ ce qui est équivalent à dire que $f' \geq 0$ sur tout intervalle $I \subset \mathcal{D}_f$. Il suit que $f' \geq 0$ sur $\mathcal{D}_f$.

c) Vrai. Les extrema de a sont atteints parmi les bornes de $\mathcal{D}_f$ et les points critiques (là où s'annule f'. a étant un point intérieur de $\mathcal{D}_f$, ce n'en n'est pas une borne. Si f admet un extremum local en a c'est donc que a est un point critique et $f'(a) = 0$.

d) Faux. Par exemple $f(x) = x^3$ et $a = 0$. a est un point critique mais f n'admet aucun extrema sur $\mathbb{R}$.

e) Faux. Par exemple $f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ vérifie $f(0) = f(2\pi)$ mais $f'(x) = \mathrm{i}f(x)$ ne s'annule jamais.

f) Faux. Le même contre exemple fonctionne.

g) Vrai. On l'a indiqué dans le cours, la preuve sera apportée lors du chapitre d'intégration qui sera vu au second semestre.

h) Vrai. Par exemple $x \mapsto |x|$ est convexe mais n'est pas dérivable en 0.

i) Vrai. Ce sont les fonctions constantes.

j) Vrai. Si f est une fonction lipschitzienne sur l'intervalle I alors il existe un réel M tel que $\forall (x, y) \in I^2,\ |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$. Considérons que x est fixé, on a $\lim\limits_{y \to x} |f(x) - f(y)| \leq \lim\limits_{y \to x} M|x - y| = 0$ et donc $\lim\limits_{y \to x} f(y) = f(x)$ ce qui prouve que f est continue au point x.
Comme c'est valable pour tout $x \in I$ alors f est bien continue sur I.

1 Applications directes du cours

Exercice n° 2

1. Par lecture graphique, f est définie sur $[-4; 7]$, dérivable partout sauf en 2.
On a : $f(0) = 3,\ f(-4) = -2,\ f(7) = 1,\ f'(-2) = \frac{5}{7}$ et $f'(5) = -\frac{2}{9}$.
2. Soit, pour $x \neq 0$, $f(x) = \frac{1}{x}$. On a, pour $a, h \neq 0$, $\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = -\frac{1}{a(a+h)} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{a^2}$.
On en déduit que f est dérivable en $a \neq 0$ et $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$.
3. Toutes les fonctions proposées sont dérivables sur $\mathbb{R}^*$, ainsi qu'à gauche et à droite en 0.
— f est continue en 0, $f'_g(0) = f'_d(0) = 0$ donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
— g est continue en 0, $g'_g(0) = 0$ et $g'_d(0) = 1$ donc g n'est pas dérivable en 0.
— h est continue en 0, $h'_g(0) = h'_d(0) = 1$ donc h est dérivable en 0 et $h'(0) = 1$.
— i n'est pas continue en 0 donc i n'est pas dérivable en 0 (ses dérivées à gauche et à droite sont cependant égales).
4. $\forall x \in \mathbb{R},\ (x^2 + 1)^{\cos x} = \mathrm{e}^{\cos(x)\ln(x^2+1)}$ est bien définie et est de classe $\mathcal{C}^\infty$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$.
On a : $\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{\mathrm{d}\left((x^2+1)^{\cos x}\right)}{\mathrm{d}x} = (-\sin(x)\ln(x^2 + 1) + \frac{2x\cos(x)}{x^2+1)})\mathrm{e}^{\cos(x)\ln(x^2+1)}$
5. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $\alpha \in \mathbb{N}$ alors x^α est un polynôme et donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, si $-\alpha \in \mathbb{N}$ alors x^α est l'inverse d'un polynôme qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$, c'est donc aussi une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Enfin, si $\alpha \notin \mathbb{Z}$ alors $x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha\ln(x)}$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Cette dernière expression de x^α est valable pour les trois situations quand $x > 0$. On montre simplement par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^\alpha) = \alpha(\alpha - 1)\dots(\alpha - n + 1)x^{\alpha - n}$.
Remarquez que, dans le cas où $\alpha \in \mathbb{N}$, les dérivées sont nulles à partir du rang $\alpha + 1$.

6. La fonction $f : x \mapsto x^3 \sin(\frac{1}{x})$ est clairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et peut être prolongée par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.
Pour $h \neq 0$ on a $\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{h^3 \sin(\frac{1}{h})}{h} = h^2 \sin(\frac{1}{h}) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$. On en déduit que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$. Pour savoir si cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, il nous faut vérifier si f' est continue en 0.
On a, pour $x \neq 0$, $f'(x) = 3x^2 \sin(\frac{1}{x}) + x\cos(\frac{1}{x}) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 = f'(0)$.
f est donc bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
7. De façon analogue à la question précédente, $g : x \mapsto x^2 \cos(\frac{1}{x})$ se prolonge par continuité en 0 en posant $g(0) = 0$. Ce prolongement est dérivable et $g'(0) = 0$.
Par contre, pour $x \neq 0$, $g'(x) = 2x\cos(\frac{1}{x}) - \sin(\frac{1}{x})$ qui n'a pas de limite en 0 et donc g n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
8. Pour $x > 0$, $x^x = e^{x\ln(x)}$ se prolonge par continuité en 0 en posant $0^0 = 1$. Cette fonction est clairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sa dérivée est $x^x(\ln(x)+1)$.
Le théorème de la limite de la dérivée s'applique : par opérations $x^x(\ln(x)+1) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\infty$ et donc $x \mapsto x^x$ n'est pas dérivable en 0.

Exercice n° 3

1. $f(x) = x^4 - x^3 + 1$ est une fonction polynômiale, elle est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On a : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 4x^3 - 3x^2 = x^2(4x-3)$. On en déduit que les points critiques de f (càd point d'annulation de f') sur $[-1;1]$ sont 0 et $\frac{3}{4}$. Les extrema de f sur $[-1;1]$ sont parmi $f(-1) = 3$, $f(0) = 1$, ,$f(\frac{3}{4}) = \frac{229}{256}$ et $f(1) = 1$. Il suit que le maximum de f sur $[-1;1]$ est 3, son minumum est $\frac{229}{256}$.
Remarquez qu'on aurait pu faire le tableau de variations, mais ce n'était pas nécessaire.
2. On pose, pour x voisin de 4, $x = 4 + h$.
On a : $\sqrt{4+h} = \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}h + h\varepsilon(h) = 2 + \frac{1}{4}h + h\varepsilon(h)$ avec $\varepsilon(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$.
On a $\sqrt{3,96} = \sqrt{4+h}$ avec $h = -0,04$. On en déduit que $\sqrt{3,96} \simeq 1,99$.
3. Puisque $f \in \mathcal{C}^3$ alors $f' \in \mathcal{C}^2$ et $f'' \in \mathcal{C}^1$.
On a $f(0) = f(1)$ donc, d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]0;1[$ tel que $f'(c) = 0$.
On a $f'(0) = f'(c)$ donc, d'après le théorème de Rolle, il existe $d \in]0;c[$ tel que $f''(d) = 0$. De même, il existe $e \in]c;1[$ tel que $f''(e) = 0$.
Enfin, $f''(d) = f''(e)$ donc, le théorème de Rolle nous assure l'existence de $\alpha \in]d;e[$ tel que $f^{(3)}(\alpha) = 0$.
4. f est dérivable sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer l'inégalité des accroissements finis :
$$|f(0) - f(3)| < 2|0-3| \iff |f(0) - 5| < 6 \iff f(0) \in]-1;11[$$
5. ln est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Soit $x > 0$. On applique le TAF sur l'intervalle $[x;x+1]$: il existe $y \in]x;x+1[$ tel que $\ln(x+1) - \ln(x) = \ln'(y)$.
Or $\ln'(y) = \frac{1}{y}$ et $x < y < x+1 \iff \frac{1}{x+1} < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$ d'où $\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$.
6. exp est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Sa dérivée seconde est strictement positive donc exp est convexe.
On a : $\forall (a,b) \in \mathbb{R},\ \exp(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b) \leq \frac{1}{2}\exp(a) + \frac{1}{2}\exp(b)$ qui est l'inégalité demandée.

2 Un peu plus dur

Exercice n° 4

f est clairement dérivable (et même de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$. Comme $|\sin| \leq 1$ on a $f(x) \underset{x\to +}{\to} 0 = f(0)$ donc f est continue en 0 et donc sur $\mathbb{R}$. Reste à étudier la dérivabilité en 0.
$\forall h \neq 0,\ \dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \sin(\dfrac{1}{h})$ qui n'a pas de limite quand $h \to 0$ (cf. TD du chapitre sur les limites).

La fonction n'est donc pas dérivable en 0. On peut préciser qu'elle ne l'est ni à droite ($h \to 0^+$), ni à gauche ($h \to 0^-$).

Exercice n° 5

a) $f(x)$ est définie si, et seulement si, $x^3\text{Arcsin}(x)$ existe et est positif.
Arcsin(x) existe pour $x \in [-1;1]$, et sur cet intervalle Arcsin(x) est du signe de x, comme x^3, ce qui prouve que $\forall x \in [-1;1],\ x^3\text{Arcsin}(x) \geq 0$. Finalement, f est définie sur $[-1;1]$.

b) $\forall h \neq 0,\ \dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \dfrac{\sqrt{h^3\text{Arcsin}(h)}}{h} = |h|\dfrac{\sqrt{h\text{Arcsin}(h)}}{h} = \pm\sqrt{h\text{Arcsin}(h)}$ selon le signe de h. La limite de $\frac{f(h)-f(0)}{h}$ est donc 0 quand $h \to 0$, ce qui prouve que f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

c) La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0, on ne pouvait donc pas appliquer les formules de dérivation pour aboutir à ce résultat.

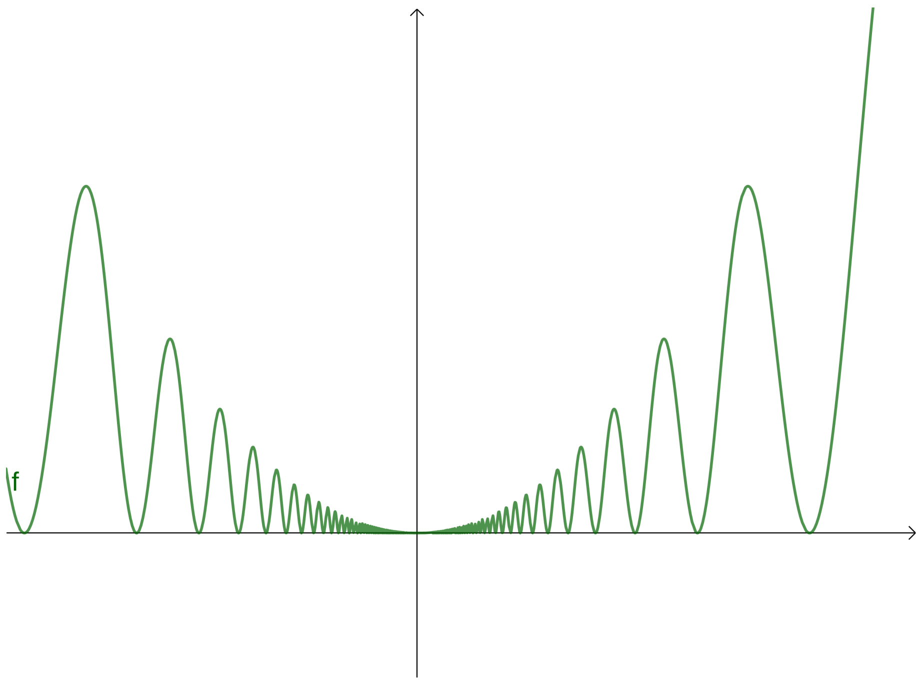
Exercice n° 6

a) f est une fonction polynômiale, définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 3(x-1)^2 \geq 0$ et f' ne s'annule que pour $x = 1$. f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ (après calcul des limites, sans difficulté).
Il existe donc une bijection réciproque $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

b) Pour $a \neq 1$ on a $f'(a) \neq 0$ et $(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$ donc f^{-1} est dérivable en $f(a)$.
Pour $a = 1$, $f'(a) = 0$ et f^{-1} n'est pas dérivable en $f(a) = f(1) = 2$. Finalement, f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$. Graphiquement, $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale au point $(1;2)$ ce qui, par symétrie, implique que $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ admet une tangente verticale au point $(2;1)$.

Exercice n° 7

1. Pour $x \in \mathbb{R}^*$, $\cos^2(\frac{1}{x}) \in [0;1]$ et donc $(1+\cos^2(\frac{1}{x}) \in [1;2]$. Il suit que $x^2 \leq f(x) \leq 2x^2$ et, par le théorème des gendarmes, $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.
On peut donc prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.
Comme, pour $x \neq 0$ on a $0 \leq f(x)$ alors f admet un minimum en 0.
2. À l'aide de Geogebra, on observe la courbe représentative de f au voisinage de 0 :



Vous pouvez vérifier que f est dérivable en 0, que $f'(0) = 0$ mais que f' n'est pas continue en 0.

Exercice n° 8

- $\cos^{(0)} = \cos,\ \cos' = -\sin,\ \cos'' = -\cos,\ \cos^{(3)} = \sin$ et $\cos^{(4)} = \cos = \cos^{(0)}$.

  Par une récurrence immédiate, on voit que $\forall n \in \mathbb{N},\ \cos^{(n)} = \begin{cases} \cos & \text{si} \quad n \text{ est multiple de } 4 \\ -\sin & \text{si} \quad n \text{ est de la forme } 4k+1 \\ -\cos & \text{si} \quad n \text{ est de la forme } 4k+2 \\ \sin & \text{si} \quad n \text{ est de la forme } 4k+3 \end{cases}$.

  Remarque : on peut se dispenser de récurrence en utilisant $\cos = \mathrm{Re}(x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}x})$, on trouve alors une formule qui unifie tous les cas : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \cos^{(n)}(x) = \cos(x + n\frac{\pi}{2})$.
- $\sin^{(0)} = \cos^{(3)}$ et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sin^{(n)} = \cos^{(n+3)}$ et on se ramène au cas précédent.
- f est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\frac{1}{3}; +\infty[$.

  On conjecture, puis on démontre par récurrence que :

$$\forall n \geq 1,\ \forall x > -\frac{1}{3},\ f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}3^n}{(3x+1)^n}$$

- g est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On utilise la formule de Leibniz et on trouve :

$$\forall n \geq 1,\ \forall x \in \mathbb{R},\ g^{(n)}(x) = \frac{(n+2)!}{2}x^2 + n(n+1)!x + \frac{n(n-1)}{2}n!$$

- h est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et, $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$ d'où, $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ h^{(n)}(x) = 2^{n-1}\sin^{(n)}(2x)$. Or, on a vu ce que vaut $\sin^{(n)}$ précédemment dans cet exercice.

Exercice n° 9

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable en 2 : $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = f'(2)$.

Pour $x \neq 2$, on a : $\frac{xf(2)-2f(x)}{x-2} = \frac{((x-2)+2)f(2)-2f(x)}{x-2} = f(2) - 2\frac{f(x)-f(2)}{x-2} \underset{x\to 2}{\longrightarrow} f(2) + 2f'(2)$.

Exercice n° 10

Soit $f : x \mapsto \sin(x) - x + \frac{x^3}{6}$.
f est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On a : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}$ et $f''(x) = -\sin(x) + x$ et $f^{(3)}(x) - \cos(x) + 1 \geq 0$. Il suit que f'' est croissante sur $\mathbb{R}$. Comme $f''(0) = 0$ on en déduit que $f'' \leq 0$ sur $\mathbb{R}^-$ et $f'' \geq 0$ sur $\mathbb{R}^+$, il suit les variations de f' : décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$. On a aussi $f'(0) = 0$ donc $f' \geq 0$ sur $\mathbb{R}$ et f est croissante sur $\mathbb{R}$.
Remarque : tout cela est plus joli avec un t _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _s.

Exercice n° 11

$f : x \longmapsto x^3 + x^{-2}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ f'(x) = 3x^2 - \frac{2}{x^3} = \frac{3x^5-2}{x^3}$ qui est du signe de $3x^5 - 2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ (car $x > 0$). La fonction $x \mapsto x^5$ étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, il en va de même de $x \mapsto 3x^5 - 2$ et, puisque cette fonction s'annule en $\sqrt[5]{\frac{2}{3}}$ alors on déduit le signe de f' et les variations de f sur $]0; 1]$ et f admet un minimum pour $x = \sqrt[5]{\frac{2}{3}}$.

Exercice n° 12

Pour $x = 0$, l résultat est vrai (on a égalité).
Soit $x > 0$ on a $\mathrm{e}^x - 1 = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^0$ et le résultat à prouver évoque les accroissements finis.
On a $\exp' = \exp$ et il existe $c \in]0; x[$ tel que $\mathrm{e}^c = \frac{\mathrm{e}^x-1}{x}$.
Comme exp est croissante sur $[0; x]$ on a $1 \leq \mathrm{e}^c \leq \mathrm{e}^x \iff 1 \leq \frac{\mathrm{e}^x-1}{x} \leq \mathrm{e}^x$. En multipliant par $x > 0$, on obtient le résultat voulu : $x \leq \mathrm{e}^x - 1 \leq x\mathrm{e}^x$, qui est donc vrai pour tout $x \geq 0$.

Exercice n° 13

On travaille par récurrence sur k.
Pour $k=1$: on a $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $fx)=0$ admet 2 solutions a et b. On a $f(a)=f(b)$ et le théorème de Rolle nous donne l'existence de c entre a et b tel que $f'(c)=0$.
Supposons que la propriété soit vraie au rang k, soit $f \in \mathcal{C}^{k+1}$ telle que $f(x)=0$ admette $k+2$ solutions : $a_1 < \cdots < a_{k+2}$. En appliquant le théorème de Rolle sur chaque intervalle $[a_i;a_{i+1}]$ ($i \in [\![1;k+1]\!]$) on obtient l'existence de $k+1$ réels $b_1 < \cdots < b_{k+1}$ tels que $\forall i \in [\![1;k+1]\!]$ on a $f'(b_i)=0$. $f \in \mathcal{C}^{k+1}$ donc $f' \in \mathcal{C}^k$ et en appliquant l'hypthèse de récurrence à f' on obtient l'existence de α tel que $(f')^{(k)}(\alpha)=0$ c'est-à-dire $f^{(k+1)}(\alpha)=0$.
La propriété étant initialisée pour $k=1$ et héréditaire, elle est vraie pour tout $k \geq 1$.

Exercice n° 14

$(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $n>1$ sont fixés. Raisonnons par l'absurde et supposons que P_n ait strictement plus de trois racines réelles. Il existe alors au moins quatre racines réelles $c<d<e<f$. En appliquant le théorème de Rolle entre chaque racine, on obtient trois racines de P' : sur $]c;d[$, $]d;e[$ et $]e;f[$.
P_n est une fonction polynomiale définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a, $\forall x \in \mathbb{R},\ P_n'(x)=nx^{n-1}+a$. Un zéro de P_n' est une solution de $nx^{n-1}+a=0 \Leftrightarrow x^{n-1}=\frac{a}{n}$. Si n est pair alors $n-1$ est impair et la fonction $x \mapsto x^{n-1}$ est strictement croissante. L'équation $x^{n-1}=\frac{a}{n}$ a alors une unique solution : $\sqrt[n-1]{\frac{a}{n}}$.
Si n est impair, en raisonnant de façon analogue, $x^{n-1}=\frac{a}{n}$ a alors deux solutions : $\pm\sqrt[n-1]{\frac{a}{n}}$ (qui sont égales ssi $a=0$).

Exercice n° 15

Pour tout réel z on a $|\text{Arctan}'(z)|=|\frac{1}{1+x^2}| \leq 1$. Soit deux réels x et y, l'Inégalité des Accroissements Finis de Arctan entre x et y donne : $|\text{Arctan } x - \text{Arctan } y| \leq |x-y|$.

Exercice n° 16

1. On a $\sin(\mathbb{R})=[-1;1]$ donc $f(\mathbb{R}^*) \subset [\frac{3}{4};\frac{5}{4}]$. Comme $[\frac{1}{4\pi};\frac{1}{2\pi}] \subset \mathbb{R}^*$ on a $f([\frac{1}{4\pi};\frac{1}{2\pi}]) \subset f(\mathbb{R}^*)$. Or, $f([\frac{1}{4\pi};\frac{1}{2\pi}])=[\frac{3}{4};\frac{5}{4}]$ donc $f(\mathbb{R}^*) \supset [\frac{3}{4};\frac{5}{4}]$. Finalement, $f(\mathbb{R}^*)=[\frac{3}{4};\frac{5}{4}]$. On note I cet intervalle.
2. Pour $x \in I$, on a $x \in \mathbb{R}^*$ et donc $f(x) \in f(\mathbb{R}*)$ c'est-à-dire $f(x) \in I$. I est donc stable par f. Comme $u_0=2 \in I$, une récurrence immédiate nous assure que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in I$ et en particulier la suite u est bien définie (car $(u_n)_n$ ne s'annule jamais).
3. f est continue sur le segment I et $f(I) \subset I$, f admet donc un point fixe sur I. En effet, la fonction définie sur $I=[\frac{3}{4};\frac{5}{4}]$ par $g(x)=f(x)-x$ vérifie $g(\frac{3}{4})=f(\frac{3}{4})-\frac{3}{4} \geq 0$ et $g(\frac{5}{4})=f(\frac{5}{4})-\frac{5}{4} \leq 0$. g étant continue, le TVI nous assure l'existence de $\alpha \in I$ tel que $g(\alpha)=0 \Leftrightarrow f(\alpha)=\alpha$.
4. f est dérivable sur I et on a, $\forall x \in I,\ |f'(x)|=|\frac{-\cos(\frac{1}{x})}{4x^2}| \leq \frac{1}{4x^2}$.
   Pour $x \in I$ on a $\frac{3}{4} \leq x \leq \frac{5}{4} \Longrightarrow (\frac{4}{3})^2 \geq \frac{1}{x^2} \geq (\frac{4}{5})^2$ et donc $|f'(x)| \leq \frac{4}{9}$.
5. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in I$, on applique l'inégalité des accroissements finis :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |f(u_n)-f(\alpha)| \leq \frac{4}{9}|u_n-\alpha| \iff |u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{4}{9}|u_n-\alpha|$$
   Par une récurrence immédiate, on en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n-\alpha| \leq (\frac{4}{9})^n|u_0-\alpha|$.
   En passant à la limite, on voit que $|u_n-\alpha| \to 0$ et donc que u converge vers α.

Exercice n° 17

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1,\ldots,a_n$ des réels dont la somme est nulle. Soit $f(x)=\sum_{k=1}^{n} a_k x^k$. f est polynômiale donc définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On a $f(0)=f(1)=0$, le théorème de Rolle assure l'existence de $b \in]0;1[$ tel que $f'(b)=0 \iff \sum_{k=1}^{n} k a_k b^{k-1}=0$.

Exercice n° 18

Soit $n \geq 2$. On cherche à majorer une fonction par une fonction affine, cela met sur la voie de la convexité. Soit $f(x) = (1+x)^n$. f est polynômiale et donc définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On a $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = n(1+x)^{n-1}$ et $f''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2}$.
Pour $x \geq -1$ on a $f''(x) \geq 0$ et donc f est convexe sur $[-1; +\infty[$. En particulier, la courbe représentative de f est au-dessus de sa tangente en 0 dont l'équation est $y = f'(0)x + f(0) \Leftrightarrow y = nx + 1$. Autrement dit : $\forall x \in [-1; +\infty[,\ (1+x)^n \geq 1 + nx$.

3 Démontrer les résultats du cours et exercices théoriques

Exercice n° 19

Soit $a \in \mathbb{R}$, f définie et dérivable en a, g définie et dérivable en $f(a)$. Pour simplifier les écritures, on va supposer que f et g sont définies sur $\mathbb{R}$ dans la suite.
f étant dérivable en a, il existe une fonction $\varepsilon_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, telle que $\forall h \in \mathbb{R},\ f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon_1(h)$ et $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon_1(h) = 0$.
De même, il existe une fonction $\varepsilon_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, telle que $\forall \widehat{h} \in \mathbb{R},\ g(f(a)+\widehat{h}) = g(f(a)) + \widehat{h}g'(f(a)) + \widehat{h}\varepsilon_2(\widehat{h})$ et $\lim\limits_{\widehat{h} \to 0} \varepsilon_2(\widehat{h}) = 0$. On a, pour tout réel h :

$$\begin{aligned} g(f(a+h)) &= g(\ f(a) + \underbrace{hf'(a) + h\varepsilon_1(h)}_{\text{noté } \widehat{h}}\ ) = g(f(a)) + (hf'(a) + h\varepsilon_1(h))g'(f(a)) + \widehat{h}\varepsilon_2(\widehat{h}) \\ &= g(f(a)) + hf'(a)g'(f(a)) + h\varepsilon_1(h)g'(f(a)) + \widehat{h}\varepsilon_2(\widehat{h}) \ \ : (\star) \end{aligned}$$

On remarque que :
$h\varepsilon_1(h)g'(f(a)) + \widehat{h}\varepsilon_2(\widehat{h}) = h\varepsilon_1(h)g'(f(a)) + (hf'(a) + h\varepsilon_1(h))\varepsilon_2(\widehat{h}) = h\varepsilon_3(h)$ et, comme $\widehat{h} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$, on a $\varepsilon_3(h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$. $(\star)$ se ré-écrit : $g(f(a+h)) = g(f(a)) + hf'(a)g'(f(a)) + h\varepsilon_3(h)$ avec $\varepsilon_3(h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$.
Autrement dit, $g \circ f$ admet un développement limité à l'ordre 1 en a, on en déduit que $g \circ f$ est dérivable en a et que $(g \circ f)'(a) = f'(a)g'(f(a))$.

Exercice n° 20

Soit I un intervalle, $a \in I$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$, continue sur I, dérivable sur $I \backslash \{a\}$ telle que $f'(x)$ tend vers $l \in \overline{\mathbb{R}}$ lorsque x tend vers a. Montrons alors que $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ tend vers l quand x tend vers a.

Pour tout $x \neq a$, le TAF nous garantit l'existence de y entre a et x tel que $f'(y) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\ \ : (\star)$. Lorsque $x \to a$ alors $y \to x$ et $(\star)$ donne le résultat voulu.

Exercice n° 21

Soit f, une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Supposons $f' > 0$ sur I.
Soit $a < b$ deux éléments de I. Le théorème des accroissements finis nous assure l'existence de $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \iff f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$. Comme $f' > 0$ et $b > a$ on en déduit $f(b) - f(a) > 0$ et f est strictement croissante sur I.

Exercice n° 22

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ qui admet des limites en $+\infty$ et $-\infty$ telles que ces limites soient égales.

— Cas où $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$: soit $f(0)$ est le minimum de f sur $\mathbb{R}$ et alors $f'(0) = 0$, soit il existe $a \neq 0$ tel que $f(a) < f(0)$. Supposons que $a > 0$. Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que $x \geq B \Longrightarrow f(x) \geq f(0)$. Soit $c = \max(a, B)$ on a donc $f(c) \geq f(0)$ et $c > 0$. Le TVI appliqué à f entre a et c donne l'existence de $d > 0$ tel que $f(d) = f(0)$. On applique le

théorème de Rolle à f : il existe $e \in]0; d[$ tel que $f'(e) = 0$.
Si $a < 0$, on procède de la même façon, mais en utilisant la limite en $-\infty$.

— Cas où $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty$: on se ramène au cas précédent en considérant $-f$.

— Cas où $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Soit f est constante sur$\mathbb{R}$ et alors $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 0$, soit il existe a tel que $f(a) \neq \ell$. D'après le TVI (généralisé aux intervalles ayant une borne infinie), il existe $b < a$ tel que $f(b) = \frac{\ell + f(a)}{2}$ et $c > a$ tel que $f(c) = \frac{\ell + f(a)}{2}$. On a alors $b < c$ et $f(b) = f(c)$, le théorème de Rolle applique sur $[b; c]$ nous garantit l'existence de $d \in]b; c[$ tel que $f'(d) = 0$.

Finalement, dans tous les cas, on a réussi à prouver l'existence d'un point d'annulation de f', c'est-à-dire à généraliser le théorème de Rolle.

Exercice n° 23

Soit $n \geq 2$. On procède par double implication :

$\Longleftarrow$: pour $n = 2$, si $\lambda_1 + \lambda_2$ sont des réels de $[0; 1]$ tels que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, on a $\lambda_1 = 1 - \lambda_2$ et la propriété est la définition de la convexité.

$\Longrightarrow$: supposons que f est convexe. On procède par récurrence sur $n \geq 2$. Pour $n = 2$, on a déjà dit que la définition de la convexité est équivalente à la propriété que l'on cherche à établir. Si f est convexe, elle vérifie donc la propriété.
Supposons la propriété soit vraie pour un certain n, vérifions qu'elle l'est également au rang $n+1$. Soit donc des réels $(a_i)_{i \in [\![1; n+1]\!]}$ et $n+1$ poids $(\lambda_i)_{i \in [\![1; n+1]\!]} \in [0; 1]^{n+1}$ tels que $\sum_i \lambda_i = 1$. Sans perte de généralité, on peut supposer $a_1 < a_2 < \cdots < a_{n+1}$ *(c'est utile si on veut faire un dessin, ce que je vous recommande).*
Si $\lambda_1 = 0$, le point a_1 « disparait » et la propriété est vraie car il ne reste que les points $a_2, \ldots a_{n+1}$. Supposons donc $\lambda_1 > 0$. On a :

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i a_i = \lambda_1 a_1 + \sum_{i=2}^{n+1} \lambda_i a_i = \lambda_1 a_1 + (1 - \lambda_1) \sum_{i=2}^{n+1} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_1} a_i$$

Par convexité de f on a $f(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i a_i) \leq \lambda_1 f(a_1) + (1 - \lambda_1) f(\sum_{i=2}^{n+1} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_1} a_i)$. On applique l'hypothèse de récurrence aux n points $a_2, \ldots, a_{n+1}$ munis des poids $\frac{\lambda_i}{1 - \lambda_1}$ (ils sont positifs, leur somme vaut 1, ils sont donc tous dans $[0; 1]$) et on obtient :

$$f(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i a_i) \leq \lambda_1 f(a_1) + (1 - \lambda_1) \sum \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_1} f(a_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(a_i)$$

La propriété est donc vraie pour tout $n \geq 2$.

Remarque : le nombre $\sum \lambda_i a_i$ est la moyenne pondérée des réels a_i pondérés par les poids λ_i. On parle de **barycentre** (mais cette notion n'est pas au programme).

4 Plus difficile...

Exercice n° 24

Soit $f : [0; a] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = 0$. On applique le TAF : il existe $b \in]0; a[$ tel que $f'(b) = \frac{f(a) - f(0)}{a - 0} \Longleftrightarrow a f'(b) = f(a)$.
À présent, $\frac{2f(a) + af'(a)}{3a} = \frac{2af'(b) + af'(a)}{3a} = \frac{2}{3} f'(b) + \frac{1}{3} f'(a)$ est un nombre compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$. Comme f' est continue sur $[b; a]$, le TVI s'applique : il existe $c \in [b; a]$ tel que $f'(c) = \frac{2f(a) + af'(a)}{3a}$.

Exercice n° 25

1. f est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} \quad \text{et} \quad f''(x) = \frac{\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x) - (\mathrm{e}^x)^2}{(1+\mathrm{e}^x)^2} = \frac{1}{(1+\mathrm{e}^x)^2}$$

Comme $f'' > 0$ sur $\mathbb{R}$ alors f est convexe sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $a_1, \dots, a_n$ strictement positifs : il existe des réels $b_1, \dots, b_n$ tels que $\forall i \in [\![1; n]\!],\ a_i = \mathrm{e}^b_i$.
La convexité de f entraîne $f(\frac{1}{n}\sum_i b_i) \leq \frac{1}{n}\sum_i f(b_i)$, autrement dit :

$$\ln(1+\mathrm{e}^{\frac{b_1+\cdots+b_n}{n}}) \leq \frac{\ln(1+\mathrm{e}^{b_1}) + \cdots + \ln(1+\mathrm{e}^{b_n})}{n} \iff \ln\left(1 + \prod_{i=1}^n (\mathrm{e}^{b_i})^{\frac{1}{n}}\right) \leq \frac{1}{n}\ln\left(\prod_{i=1}^n (1+\mathrm{e}^{b_i})\right)$$

On applique la fonction exponentielle qui est croissante, on remplace e^{b_i} par a_i et on obtient le résultat voulu :

$$1 + \left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\prod_{i=1}^n (1+a_i)\right)^{\frac{1}{n}}$$

3. Soit $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ des réels strictement positifs, on a :

$$\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{i=1}^n y_i\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\frac{1}{n}} \left(1 + \left(\prod_{i=1}^n \frac{y_i}{x_i}\right)^{\frac{1}{n}}\right)$$

On applique le résultat précédent et on obtient :

$$\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{i=1}^n y_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\frac{1}{n}} \left(\prod_{i=1}^n (1+\frac{y_i}{x_i})\right)^{\frac{1}{n}}$$

Pour tout $1 \leq i \leq n$ on a : $x_i^{\frac{1}{n}}(1+\frac{y_i}{x_i})^{\frac{1}{n}} = (x_i+y_i)^{\frac{1}{n}}$ d'où le résultat voulu.

Exercice n° 26

Soit $a_1, \dots, a_n$ des réels strictement positifs. On a : $\sqrt[n]{a_1 \dots a_n} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln(a_1 \dots a_n)} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}(\ln(a_1)+\cdots+\ln(a_n))}$
ln étant concave, on a : $\frac{1}{n}(\ln(a_1)+\cdots+\ln(a_n)) \leq \ln(\frac{a_1+\cdots+a_n}{n})$. On applique exp qui est croissante et on obtient le résultat voulu : $\sqrt[n]{a_1 \dots a_n} \leq \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$.

Remarque : ce résultat s'appelle l'inégalité arithmético-géométrique.

Exercice n° 27

Soit $a > 0$, f et g deux fonctions continues sur $[0; a]$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; a]$, qui vérifient $f(0) = g(0) = 0$ et telles que g et g' ne s'annulent pas sur $]0; a]$.

a) Soit $x \in]0; a]$. On note $\varphi : t \longmapsto f(x)g(t) - f(t)g(x)$, définie pour $t \in [0; a]$. On a $\varphi(0) = \varphi(x) = 0$. Puisque f est continue sur $[0; a]$ et $\mathcal{C}^1$ sur $]0; a]$ alors il en va de même pour φ et le théorème de Rolle s'applique : il existe $c \in]0; x[$ tel que $\varphi'(c) = 0 \iff f(x)g'(c) = f'(c)g(x)$: $(\star)$.

b) Comme g et g' ne s'annulent pas sur $]0; a]$, $(\star)$ devient $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x)}{g(x)}$ avec $x \in]0; a]$ et $c \in]0; x[$.
En faisant tendre x vers 0 on a c qui tend vers 0 et on obtient le résultat voulu : si $\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe alors $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ existe aussi et que ces limites sont égales.