Chapitre 13 - Espaces Vectoriels - Exercices

1 Applications directes du cours

Exercice n° 1

Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

$$E = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / u \text{ converge}\} \qquad F = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / u \text{ diverge}\}$$

$$G = \{y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / y'' = t^2 y\} \qquad H = \{(x; y) \in \mathbb{K}^2 / xy = 0\}$$

Exercice n° 2

Les familles suivantes sont-elles libres ou liées ?

1. Dans $\mathbb{K}[X]$: $(3 + X \ ; \ X^2 - X + 1 \ ; \ 5X - X^2)$.
2. Dans $\mathbb{K}[X]$: $(3 + X^2 \ ; \ X^2 + X + 1 \ ; \ 5X - X^2 \ ; \ X^2 - 7X)$.
3. Dans $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: $(\text{Arctan} \ ; \ \exp; \ (x \mapsto x))$.
4. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: $\left(\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$.

Exercice n° 3

Généralités sur les espaces vectoriels.

1. Soit E un espace vectoriel. Prouver que $\vec{0}$ est dans tout sous-espace vectoriel de E.
2. Donner un exemple d'une partie de $\mathbb{K}[X]$ qui ne soit pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.
3. L'ensemble $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} / f(0) = 1\}$ est-il un espace vectoriel ?
4. L'ensemble $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} / f(3) = 0\}$ est-il un espace vectoriel ?
5. On travaille dans $\mathbb{R}^3$. On considère l'ensemble $\Gamma = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - 2y + z = 0\big\}$.
   Prouver que Γ est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
6. On poursuit la question précédente. Trouver un supplémentaire de Γ dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice n° 4

Familles (finies) de vecteurs.

1. Prouver qu'une famille de vecteurs contenant $\vec{0}$ est liée. Etudier la réciproque.
2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathcal{F}$ une famille finie (et non vide) de vecteurs de E. Prouver que $\mathcal{F}$ est liée si, et seulement si, un des vecteurs de $\mathcal{F}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathcal{F}$. *On commencera par donner du sens à tous les termes employés.*
3. Prouver que la famille $(X^3 + X^2 \ ; \ X^2 - 5X + 2 \ ; \ X + 1 \ ; \ 5)$ est une base de $\mathbb{K}_3[X]$.
4. Donner deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{K}_3[X]$.
5. Montrer que $\mathbb{K}^3 = \{(x; 2x; 3x) / x \in \mathbb{K}\} \oplus \{(x + y; x - y; y) / (x; y) \in \mathbb{K}^2\}$.
6. Montrer que l'ensemble T des matrices triangulaires supérieures est un sous-espace de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   En donner une base puis un supplémentaire.
7. Prouver que $F = \{P \in \mathbb{K}[X] / P(0) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.
8. On poursuit la question précédente. Déterminer un supplémentaire de F.

2 Vrai ou faux sur l'ensemble du chapitre

a) $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
b) L'ensemble des polynômes de degré 3 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.
c) L'ensemble Π des fonctions vérifiant $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
d) L'ensemble des solutions réelles de $y'' = 1$ est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
e) Deux droites vectorielles distinctes d'un même espace vectoriel sont toujours en somme directe.
f) L'intersection de deux plans vectoriels est une droite vectorielle.
g) Si F est un sous-espace vectoriel de E alors $E \backslash F$ est supplémentaire de F.
h) La famille $(X, X+1)$ est une base de $\mathbb{K}_1[X]$.
i) Une famille de 3 polynômes de $\mathbb{K}_1[X]$ est nécessairement liée.
j) L'ensemble des suites géométriques de raison 2 est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
k) Une famille de polynômes qui n'est pas échelonnée en degré est liée.

3 Un peu plus dur

Exercice n° 5

Dans l'espace muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ donner une base puis un supplémentaire du plan P dont une équation cartésienne est $3x + 2y - z = 0$.
(Peut-on calculer simplement des produits vectoriels ou des produits scalaires ?)

Exercice n° 6

Soit $F = \{P \in \mathbb{K}_3[X] / (X-3) | P\}$. Après avoir justifié F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}_3[X]$, en proposer une base et un supplémentaire de F.

Exercice n° 7

Soit F l'ensemble des matrices 2×2 dont la somme des coefficients diagonaux est nulle.
Après avoir justifié que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, en donner une base puis un supplémentaire.

Exercice n° 8

Soit E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace de E si, et seulement si, $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice n° 9

Soit E un espace vectoriel. On appelle **endomorphisme** de E une application $E \to E$ qui respecte les combinaisons linéaires.

1. Que signifie « qui respecte les combinaisons linéaires » ?
2. Donner un exemple d'endomophisme de $\mathbb{K}[X]$.
3. On appelle **noyau** d'un endomophisme l'ensemble des vecteurs donc l'image est $\vec{0}$. Prouver que le noyau d'un endomophisme est un sous-espace vectoriel de E.
4. Quel est le noyau de l'exemple fourni en 2. ?

Exercice n° 10

On travaille dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, l'ensemble des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$.
On considère les ensembles $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ des fonctions paires et impaires respectivement.
Prouver que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Exercice n° 11

On travaille dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et on considère la famille $\mathcal{F} = (\cos, \sin)$.

1. Prouver que $\mathcal{F}$ est libre.
2. Prouver que pour tout $p \in \mathbb{N}$ $x \mapsto \sin(x+p)$ est dans $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{G}_n$ la famille $(x \mapsto \sin(x+p))_{p \in [\![0,n]\!]}$. Pour quelles valeurs de n la famille $\mathcal{G}_n$ est-elle libre ?

Exercice n° 12

Pour tout réel a, soit f_a la fonction $x \mapsto e^{ax}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(a_i)_{i \in [\![0,n]\!]} \in \mathbb{R}^{n+1}$ avec $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$.
Prouver que $(f_{a_i})_{i \in [\![0,n]\!]}$ est une famille libre.

Exercice n° 13

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $(x \mapsto \ln(kx))_{1 \leq k \leq n}$ est-elle libre ?

Exercice n° 14

Prouver que $\mathbb{K}[X]$ n'admet pas de famille génératrice finie.

4 Démontrer les résultats du cours

Exercice n° 15

On travaille dans un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E et on désigne par $\mathcal{F}$ une famille finie (non vide) de vecteurs.

1. Prouver que si $\mathcal{F}$ est liée, toute sur-famille finie de $\mathcal{F}$ est aussi liée.
2. Prouver que si $\mathcal{F}$ est libre, toute sous-famille finie de $\mathcal{F}$ est aussi libre.

Exercice n° 16

Prouver qu'une famille de polynômes non nuls qui est échelonnée en degrés est libré.

Exercice n° 17

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et $\mathcal{B} = (\vec{e_1}; \ldots; \vec{e_n})$ une de ses bases. Soit $r \in [\![1; n-1]\!]$.
Prouver que $E = \text{Vect}\left((\vec{e_i})_{1 \leq i \leq r}\right) \oplus \text{Vect}\left((\vec{e_i})_{r < i \leq n}\right)$.

5 Plus difficile...

Exercice n° 18

Soit E un espace vectoriel, $\vec{x}$, $\vec{y}$ et $\vec{z}$ trois vecteurs. On pose $\vec{a} = \vec{x} + \vec{y}$, $\vec{b} = \vec{y} + \vec{z}$ et $\vec{c} = \vec{z} + \vec{x}$.
Prouver que $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est libre si, et seulement si, $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ est libre.