Correction des exercices du chapitre 13

Exercice n° 1

a) Faux. $1 \in \mathbb{R}$ mais $\mathrm{i}1 = \mathrm{i} \notin \mathbb{R}$ alors que c'est une combinaison linéaire (à coefficient complexe) d'un réel.

b) Faux. Le polynôme nul n'est pas dans cet ensemble, ce n'est donc pas un SEV de $\mathbb{K}[X]$.

c) Vrai. La foncrion nulle est dans Π et les opérations sur les limites justifient que Π est stable par combinaisons linéaires.

d) Faux. La fonction nulle n'est pas dans cet ensemble, ce n'est donc pas un SEV de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

e) Vrai. Deux droites vectorielles distinctes sont de la forme $d = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u})$ et $d' = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{v})$ avec $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ qui sont non-colinéeaires. Un vecteur commun à ces deux droites est donc de la forme $\lambda\overrightarrow{u} = \mu\overrightarrow{v}$ soit $\overrightarrow{0}$ puisque $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires. Il suit que d et d' sont en somme directe.

f) Faux. Dans $\mathbb{K}[X]$, $\mathrm{Vect}(1, X)$ et $\mathrm{Vect}(X^2, X^3)$ sont des plans vectoriels dont l'intersection est $\{0\}$ (qui n'est pas une droite vectorielle).

g) Faux. Si F est un sous-espace vectoriel de E alors $E \backslash F$ ne contient pas $\overrightarrow{0}$, ce n'est donc pas un SEV de E.

h) Vrai. Montrons que la famille $(X, X+1)$ est libre et génératrice de $\mathbb{K}_1[X]$:
- Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ tel que $aX + b(X+1) = 0$. On a alors $\begin{cases} a+b=0 \\ b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$ et la famille est libre.
- Soit $P \in \mathbb{K}_1[X]$, il existe $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ tel que $P = aX + b$. On a alors $P = b(X+1) + (a-b)X$ et donc $(X, X+1)$ est génératrice de $\mathbb{K}_1[X]$.

i) Vrai. Soit A, B, C trois polynômes de $\mathbb{K}_1[X]$, fixés. L'équation $xA + yB + zC = 0$ dont les inconnues sont les scalaires x, y, z correspond à un système homogène de deux équations à trois inconnues. Il a donc une infinité de solutions, ce qui prouve que la famille (A, B, C) est liée.

j) Vrai. L'ensemble des suites géométriques de raison 2 est $\mathrm{Vect}((2^n)_{n\in\mathbb{N}})$, c'est bien une droite vectorielle de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

k) Faux. La famille $(X, X+1)$ n'est pas échelonnée en degrés mais elle est libre (on l'a vu en h).

1 Applications directes du cours

Exercice n° 2

- E contient la suite nulle. Par opérations sur les limites, E est stable par combinaisons linéaires. E est donc un SEV de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
- F n'est pas un SEV de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ car il ne contient pas la suite nulle.
- G est l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène, c'est donc un SEV de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.
  Remarque : ai-je le droit d'écrire $\mathcal{C}^\infty$ et pas $\mathcal{C}^2$, comme dans l'énoncé ?
- $(1; 0) \in H$ et $(0; 1) \in H$ mais $(1; 1) \notin H$ donc H n'est pas stable par combinaisons linéaires, ce n'est pas un SEV de $\mathbb{K}^2$.
  Remarque : Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, savez-vous représenter H ?

Exercice n° 3

1. Soit $(\alpha, \beta\gamma) \in \mathbb{K}^3$.

$$\alpha(3+X)+\beta(X^2-X+1)+\gamma(5X-X^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \beta - \gamma = 0 \\ \alpha - \beta + 5\gamma = 0 \\ 3\alpha + \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a : $\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 5\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 5\\ 0 & 0 & -11\end{pmatrix}$ qui est inversible (puisque son nombre de pivots est maximal). Et donc le système n'a qu'une seule solution : la solution triviale. Il suit que la famille est libre.

2. Chercher une combinaison linéaire nulle de la famille $(3+X^2; X^2+X+1; 5X-X^2; X^2-7X)$ revient à résoudre un système linéaire homogène à 3 inconnues et 4 équations. Un tel système est compatible (car homogène) et admet une infinité de solutions (il y a au moins un paramètre). On en déduit que la famille est liée.
Remarque : dans ces deux derniers cas, on ne demandait pas d'exhiber une combinaison linéaire nulle ce qui a permis de se dispenser de la résolution du système linéaire.

3. Notons $f : x \mapsto x$. Soit $(\alpha;\beta;\gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha\mathrm{Arctan} + \beta\exp + \gamma f = 0$. Cette égalité est entre fonctions, elle s'applique donc pour tout réel x. En particulier, pour $x = 0$, on obtient $\alpha\mathrm{Arctan}(0) + \beta\exp(0) + \gamma \times 0 = 0 \iff \beta = 0$.
On a donc $\alpha\mathrm{Arctan} + \gamma f = 0$. En dérivant deux fois (ce qui est possible car les fonctions sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ on obtient $\alpha\mathrm{Arctan}'' + \beta\exp + \gamma f'' = 0 \iff \alpha\mathrm{Arctan}'' = 0 \iff \alpha = 0$. On en déduit $\beta = 0$. Finalement, la seule combinaison linéaire nulle de $(\mathrm{Arctan}; \exp; f)$ est triviale et la famille est libre.

4. Soit $(x;y;z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $x\begin{pmatrix}1 & 4\\ 3 & 5\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}-2 & 5\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.
Cette équation matricielle est équivalente à : $\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ 4 & 1 & 5\\ 3 & 0 & 1\\ 5 & 2 & 1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$ et on a :

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ 4 & \boxed{1} & 5\\ 3 & 0 & 1\\ 5 & 2 & 1\end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix}-11 & 0 & -17\\ 4 & \boxed{1} & 5\\ 3 & 0 & \boxed{1}\\ -3 & 0 & -9\end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix}40 & 0 & 0\\ 4 & \boxed{1} & 5\\ 3 & 0 & \boxed{1}\\ \boxed{24} & 0 & 0\end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 4 & \boxed{1} & 5\\ 3 & 0 & \boxed{1}\\ \boxed{24} & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Le système est homogène et donc compatible, il a trois pivots (encadrés) et donc il n'y a pas de paramètre : il a donc une unique solution qui est $(x;y;z) = (0;0;0)$ et la famille est libre.

Exercice n° 4

Généralités sur les espaces vectoriels.

1. Soit E un espace vectoriel. Soit F un SEV de E. F n'est pas vide, il contient donc un vecteur, notons-le $\overrightarrow{u}$. F est stable par combinaisons linéaires, $0\overrightarrow{u}$ est donc dans F. Or, $0\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$. Finalement, $\vec{0}$ est dans tout sous-espace vectoriel de E.
2. $\{X\}$ est une partie de $\mathbb{K}[X]$ qui n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$. (Toute partie qui ne contient pas le polynôme nul convient).
3. L'ensemble $\{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} / f(0) = 1\}$ est inclus dans $\mathbb{R}^\mathbb{R}$. Si c'était un EV ce serait donc un SEV de $\mathbb{R}^\mathbb{R}$. Or, cet ensemble ne contient pas la fonction nulle, ce n'est donc pas un SEV de $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ et donc un EV. est-il un espace vectoriel ?
4. L'ensemble $\{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} / f(3) = 0\}$ contient la fonction nulle et est stable par combinaisons linéaires, c'est donc un SEV de $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ et donc un EV.
5. Soit $(x;y;z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$(x;y;z) \in \Gamma \Leftrightarrow x-2y+z = 0 \Leftrightarrow x = 2y-z \Leftrightarrow (x;y;z) = (-2y+z;y;z) \Leftrightarrow (x;y;z) = y(-2;1;0)+z(1;0;1)$$

Finalement, $\Gamma = \mathrm{Vect}((-2;1;0),(1;0;1))$ qui est bien un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ puisque $(-2;1;0)$ et $(1;0;1)$ ne sont pas colinéaires (leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles).

6. Le vecteur $(1;0;0)$ n'est pas dans Γ (puisque $1-2\times 0+0\neq 0$). Il suit que $\text{Vect}((1;0;0))$ est en somme directe avec Γ. En utilisant les dimensions (qu'on n'a pas encore vues) on conluerait immédiatement : les trois dimensions de $\mathbb{R}^3$ sont partagées entre les deux dimensions de Γ et la dimension de $\text{Vect}((1;0;0))$ et donc ces sous-espaces en somme directe sont supplémentaires.

   Sans théorie de la dimension, on sait que la somme est directe, il nous reste à voir qu'elle génère tout l'espace. Pour ce faire, il suffit de voir qu'elle génère la base canonique de $\mathbb{R}^3$:
   — $(1;0;0)=0(-2;1;0)+0(1;0;1)+1(1;0;0)$;
   — $(0;1;0)=1(-2;1;0)+0(1;0;1)+2(1;0;0)$;
   — $(0;0;1)=0(-2;1;0)+1(1;0;1)+(-1)(1;0;0)$.
   Finalement, Γ et $\text{Vect}((1;0;0))$ sont des sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.

Remarque : on a vu dans cet exercice une propriété implicite du cours. Si E et F sont des EV tels que $F\subset E$ alors F est un SEV de E.

Exercice n° 5

Familles (finies) de vecteurs.

1. Soit E un $\mathbb{K}-$EV et $\mathcal{F}$, une famille finie de vecteurs de E qui contient $\vec{0}$. Notons $\mathcal{F}=(\vec{0},\vec{f_2},\dots,\vec{f_n})$. On a $1\vec{0}+0\vec{f_2}+\cdots+0\vec{f_n}=\vec{0}$ qui est une combinaison linéaire nulle et non triviale des vecteurs de $\mathcal{F}$; c'est donc une famille liée.
   La réciproque est fausse : une famille peut être lie sans contenir le vecteur nul. Dans n'importe que EV, si $\vec{x}$ est un vecteur non nul, la famille $(\vec{x},\vec{x})$ ne contient pas $\vec{0}$ mais est liée car $1\vec{x}+(-1)\vec{x}=\vec{0}$.
2. Soit E un $\mathbb{K}$-EV, $\mathcal{F}$ une famille finie (et non vide) de vecteurs de E, on note Notons $\mathcal{F}=(\vec{f_1},\vec{f_2},\dots,\vec{f_n})$. Raisonnons par double implication pour montrer que $\mathcal{F}$ est liée si, et seulement si, un des vecteurs de $\mathcal{F}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathcal{F}$.
   $\underline{\Longrightarrow :}$ supposons que $\mathcal{F}$ est liée. Il existe une combinaison linéaire nulle et non triviale des vecteurs de $\mathcal{F}$: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\vec{f_i}=\vec{0}$ avec les λ_i des scalaires qui ne sont pas tous nuls. Quitte à renommer les vecteurs de $\mathcal{F}$, on peut supposer que $\lambda_1\neq 0$. On a alors $\vec{f_1}=-\displaystyle\sum_{i=2}^{n}\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\vec{f_1}$ et donc $\vec{f_1}$ est une combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathcal{F}$.
   $\underline{\Longleftarrow :}$ Supposons que le vecteur $\vec{f_j}$ soit une combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathcal{F}$: $\vec{f_j}=\displaystyle\sum_{i\neq j}\lambda_i\vec{f_i}$. On a alors $(-1)\vec{f_j}+\displaystyle\sum_{i\neq j}\lambda_i\vec{f_i}=\vec{0}$ qui est une combinaison linéaire nulle mais non triviale des vecteurs de $\mathcal{F}$ qui est donc liée.
3. La famille $(X^3+X^2\ ;\ X^2-5X+2\ ;\ X+1\ ;\ 5)$ est échelonnée en degré et donc libre. Pour montrer qu'elle est génératrice de $\mathbb{K}_3[X]$, montrons qu'elle génère les vecteurs de la base canonique.
   — $1=0(X^3+X^2)+0(X^2-5X+2)+0(X+1)+\frac{1}{5}5$
   — $X=0(X^3+X^2)+0(X^2-5X+2)+1(X+1)-\frac{1}{5}5$
   — $X^2=0(X^3+X^2)+1(X^2-5X+2)+5(X+1)-\frac{7}{5}5$
   — $X^3=1(X^3+X^2)-1(X^2-5X+2)-5(X+1)+\frac{7}{5}5$
   La famille est libre et génératrice de $\mathbb{K}_3[X]$, c'en est donc une base.
4. $\mathbb{K}_3[X]=\text{Vect}(1;X^2)\oplus\text{Vect}(X;X^3)$.
5. $E=\{(x;2x;3x)/x\in\mathbb{K}\}=\text{Vect}((1;2;3))$ et $F=\{(x+y;x-y;y)/(x;y)\in\mathbb{K}^2\}=\text{Vect}((1;1;0);(1;-1;1))$ sont des SEV de $\mathbb{K}^3$.
   La famille $((1;2;3);(1;1;0);(1;-1;1))$ est libre (laissé en exercice) donc la somme $E\oplus F$ est directe. Il reste à montrer qu'elle génère l'espace entier pour conclure que E et F sont supplémentaires. (Avec la dimension, ce serait facile !)
   Pour tout vecteur de $\vec{u}\in\mathbb{K}^3$, essayer d'écrire $\vec{u}$ comme combinaison linéaire de $((1;2;3);(1;1;0);(1;-1;1))$ revient à résoudre un système linéaire dont la matrice est $\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&-1\\3&0&1\end{pmatrix}$. Cette matrice est inversible (exercice) donc le système admet toujours une unique solution : il est toujours possible

d'écrire $\vec{u} \in \mathbb{K}^3$ comme combinaison linéaire de la famille $((1;2;3);(1;1;0);(1;-1;1))$ qui est donc génératrice de $\mathbb{K}^3$.
Finalement, E et F sont bien supplémentaires dans K^3.

6. L'ensemble T des matrices triangulaires supérieures est un sous-espace de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ car il est non-vide et stable par combinaisons linéaires.
Pour en donner une base puis un supplémentaire, on va se servir de la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, c'est-à-dire $\mathcal{B}_{\text{can}} = (E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1;3]\!]^2}$.
Il est clair que $(E_{1,1};E_{1,2};E_{1,3};E_{2,2};E_{2,3};E_{3,3})$ est génératrice de $\mathcal{T}$. C'est également une famille libre (comme sous-famille d'une famille libre), c'est donc une base de $\mathcal{T}$.
$F = \text{Vect}(E_{2,1};E_{3,1};E_{3,1})$ est un supplémentaire de $\mathcal{T}$. En effet :
— c'est un SEV (en tant que Vect) ;
— $F \cap \mathcal{T} = \{0_3\}$ donc la somme est directe ;
— la somme génère $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ puisqu'elle génère toutes les matrices de $\mathcal{B}_{\text{can}}$.
7. $0 \in F$ donc $\neq \emptyset$. Si P et Q sont deux polynômes de F alors, pour tous scalaires λ et μ, le polynôme $A = \lambda P + \mu Q$ vérifie $A(0) = \lambda P(0) + \mu Q(0) = 0$ donc $A \in F$.
F est donc bien un SEV de $\mathbb{K}[X]$.
8. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. La division euclidienne de P par X s'écrit $P = QX + R$ avec $R \in \mathbb{K}$. C'est également la décomposition de P en la somme d'un élément de F (le polynôme QX) et d'un élément de $\mathbb{K}$ (le polynôme R qui n'est pas dans F sauf lorsqu'il est nul). L'unicité de la division euclidienne donne l'unicité de cette écriture. On en déduit que $\mathbb{K}[X] = F \oplus \mathbb{K}$.
Remarque : dans cette dernière question, on a fait la confusion de $\mathbb{K}$ et $\mathbb{K}_0[X]$.

2 Un peu plus dur

Exercice n° 6

Deux versions pour trouver une base de P :
- Version 1 : le vecteur $\vec{u}(x;y;z)$ est dans P si, et seulement si, $x = -\frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z$. Autrement dit : si, et seulement si, $\vec{u}$ s'écrit $y(-\frac{2}{3};1;0) + z(\frac{1}{3};0;1)$. La famille $(\vec{u_1}(-\frac{2}{3};1;0);\vec{u_2}(\frac{1}{3};0;1))$ est génératrice de P. Comme ces deux vecteurs sont non-colinéaires, ils forment une famille libre et $(\vec{u_1};\vec{u_2})$ est une base de P.
- Version 2 : la dimension est sous-jacente.
Les vecteurs $\vec{v_1}(1;0;3)$ et $\vec{v_2}(0;1;2)$ sont dans le plan P, ils ne sont pas colinéaires et forment donc une famille libre de P. On en déduit que $P = \text{Vect}(\vec{v_1};\vec{v_2})$ et $(\vec{v_1};\vec{v_2})$ est une base de P.

Remarque : c'est l'occasion de constater qu'il n'y a jamais unicité de la base d'un $\mathbb{K}-$EV (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Pour trouver un supplémentaire de P, il suffit d'avoir une droite vectorielle qui n'est pas dans P, par exemple $\text{Vect}(\vec{k})$.

Il est clair que P et $\text{Vect}(\vec{k})$ sont en somme directe mais il n'est pas évident que leur somme génère l'espace entier. Lorsqu'on disposera de la dimension, il suffira d'indiquer que les trois dimensions de l'espace sont « réparties » entre le plan P et la droite $\text{Vect}(\vec{k})$. À ce stade, pour montrer que l'espace entier est généré, il suffit de montrer que les vecteurs $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$ le sont.
Pour $\vec{k}$, c'est évident. On a :

$$\vec{i}(1;0;0) = \vec{v_1} - 3\vec{k} \text{ et } \vec{j}(0;1;0) = \vec{v_2} - 2\vec{k}$$

Remarques :

1. il y a une correspondance bijective entre les vecteurs de l'espace et leur représentation en coordonnées. C'est usuel en géométrie mais on vient de voir dans ce chapitre que c'est le cas dans tout espace vectoriel dès lors qu'on dispose d'une base. Dans tous les cas, il ne faut pas confondre le vecteur avec ses coordonnées.

2. La base de l'espace n'est pas supposée orthonormée, on ne peut donc pas calculer les produits scalaires et vectoriels simplement à l'aide des coordonnées.

Exercice n° 7

F est non vide puisque $0 \in F$. Soit deux polynômes de F : $(X-3)P$ et $(X-3)Q$ (avec P et Q des polynômes de degrés ≤ 2). Pour tous scalaires λ et μ on a $\lambda(X-3)P+\mu(X-3)Q = (X-3)(\lambda P+\mu Q) \in F$. F est donc stable par combinaisons linéaires : c'est un SEV de $\mathbb{K}_3[X]$.

La famille $((X-3); (X-3)^2; (X-3)^3)$ est libre car elle est échelonnée en degrés. La formule de Taylor nous permet d'affirmer qu'elle est génératrice de F, c'en est donc une base.

La division euclidienne par $X-3$ nous assure que tout polynôme $P \in \mathbb{K}_3[X]$ s'écrit de façon unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de $\mathbb{K}_0[X]$, on en déduit que ce sont des SEV supplémentaires de $\mathbb{K}_3[X]$.

Exercice n° 8

Il est facile de vérifier que F contient la matrice nulle et qu'il est stable par combinaisons linéaires, c'est donc une SEV de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Toute matrice de F s'écrit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = a(E_{1,1} - E_{2,2}) + bE_{1,2} + cE_{2,1}$. On en déduit que la famille $(E_{1,1} - E_{2,2}; E_{1,2}; E_{2,1})$ est génératrice de F. Il est aisé de vérifier que c'est une famille libre, c'est donc une base de F.

$\text{Vect}(E_{1,1})$ est un supplémentaire de F dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Il est clair que la somme est directe puisque l'intersection des deux sous-espaces est réduite à la matrice nulle. Il est également aisé de voir que la somme $\text{Vect}(E_{1,1}) \oplus F$ génère la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pour conclure que ce sont des SEV supplémentaires dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice n° 9

Soit E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrons que $F \cup G$ est un sous-espace de E si, et seulement si, $F \subset G$ ou $G \subset F$ par double implication.

- $\underline{\Longleftarrow}$: Si $F \subset G$ alors $F \cup G = G$ qui est un SEV. De façon analogue, si $G \subset F$ alors $F \cup G = F$ qui est un SEV.
- $\underline{\Longrightarrow}$: supposons que $F \cup G$ est un SEV de E et raisonnons par l'absurde en supposant qu'aucune inclusion $F \subset G$ ou $G \subset F$ ne soit vraie. Cela signifie qu'il existe $\vec{u} \in F \backslash G$ et $\vec{v} \in G \backslash F$.
  On a alors $\vec{u} \in F \cup G$ et $\vec{v} \in F \cup G$ donc $\vec{u}+\vec{v} \in F \cup G$ ce qui signifie que $\vec{u}+\vec{v} \in F$ ou $\vec{u}+\vec{v} \in G$. Dans le premier cas, en additionnant les vecteurs $\vec{u}+\vec{v}$ et $-\vec{u}$ de F on obtient $\vec{v} \in F$ ce qui est absurde. En raisonnant de façon analogue dans le second cas, on obtient $\vec{u} \in G$ qui est également absurde. Finalement on a $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Finalement, $F \cup G$ est un sous-espace de E si, et seulement si, $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice n° 10

1. Soit $f : E \to E$. f « respecte les combinaisons linéaires » lorsque, pour toute combinaison linéaire de vecteurs de E $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ on a $f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v})$
2. La dérivation est un endomophisme de $\mathbb{K}[X]$.
3. Soit f un endomorphisme. Comme f respecte les combinaisons linéaires on a :

$$f(\vec{0}) = f(0.\vec{0}) = 0f(\vec{0}) = \vec{0}$$

et donc $\vec{0}$ est dans le noyau de f qui n'est donc pas vide. Prouvons qu'il est stable par combinaisons linéaires. Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans le noyau de f, c'est-à-dire tels que $f(\vec{u} = \vec{0}$ et $f(\vec{u} = \vec{0}$. Soit également deux sacalaires λ et μ. On a :

$$f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v}) = \lambda\vec{0} + \mu\vec{0} = \vec{0}$$

$\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ est dans le noyau de f qui est donc un ensemble stable par combinaisons linéaires. Finalement, c'est un SEV de E.

4. Le noyau de la dérivation dans$\mathbb{K}[X]$ est $\mathbb{K}_0[X]$.

Exercice n° 11

Il est aisé de voir que les ensembles $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ des fonctions paires et impaires sont des SEV de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la décomposition pour tout réel x : $f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ donne une décomposition de f en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. On a déjà vu que cette décomposition est unique (TD sur les raisonnements, présentation du raisonnement par analyse-synthèse) ; cela permet de conclure que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Exercice n° 12

On travaille dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et on considère la famille $\mathcal{F} = (\cos, \sin)$.

1. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha\cos + \beta\sin = 0$, c'est-à-dire tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ \alpha\cos(x) + \beta\sin(x) = 0$. Avec $x = 0$ on obtient $\alpha = 0$, avec $x\frac{\pi}{2}$ on obtient $\beta = 0$. On en déduit que $\mathcal{F}$ est libre.
2. Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\sin(x+p)\sin(x)\cos(p) + \cos(x)\sin(p)$ et donc la fonction $x \mapsto \sin(x+p)$ vaut $\sin(p)\cos + \cos(p)\sin$, c'est-à-dire qu'elle est dans $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.
3. La famille $\mathcal{G}_0 = (\sin)$ est libre (car $\sin \neq 0$).

   La famille $\mathcal{G}_1 = (\sin; x \mapsto \sin(x+1))$ est également libre : soit α, β les coefficients d'une combinaison linéaire nulle de $\mathcal{G}_1$: $\forall x \in \mathbb{R},\ \alpha\sin(x) + \beta\sin(x+1) = 0$. En prenant $x = \frac{\pi}{2}$ puis $x = \frac{\pi}{2} - 1$ on obtient $\beta = 0$ puis $\alpha = 0$.

   De plus, on a $\mathrm{Vect}(\mathcal{G}_1) = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$. L'inclusion $\mathrm{Vect}(\mathcal{G}_1) \subset \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ est assurée par la question 2. Pour l'inclusion réciproque, on écrit $(x \mapsto \sin(x+1)) = \alpha\cos + \beta\sin$. Comme $\mathcal{G}_1$ est libre, les fonctions sin et $x \mapsto \sin(x+1)$ ne sont pas colinéaires et $\alpha \neq 0$. Il suit que $\cos = \frac{1}{\alpha}(x \mapsto \sin(x+1)) - \frac{\beta}{\alpha}\sin$.

   On a $(x \mapsto \sin(x+2) \in \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ (question 2) et donc $(x \mapsto \sin(x+2) \in \mathrm{Vect}(\mathcal{G}_1)$. Il suit que $\mathcal{G}_2$ est liée et, comme pour $n \geq 2$ $\mathcal{G}_n$ est une sur-famille de $\mathcal{G}_2$ alors $\mathcal{G}_n$ est également liée.

Exercice n° 13

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(a_i)_{i \in [\![0,n]\!]} \in \mathbb{R}^{n+1}$ avec $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$.
Soit des réels $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ tels que $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i f_{a_i}$ est nulle. Supposons que $\lambda_n \neq 0$, on a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_n}\frac{\mathrm{e}^{a_i x}}{\mathrm{e}^{a_n x}} = 0 \iff \forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\lambda_n}\mathrm{e}^{(a_i - a_n)x} + 1 = 0$$

En prennt la limite en $x \to +\infty$ on obtient une absurdité puisque $\forall i \neq n$ on a $a_i - a_n < 0$ et donc $\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\lambda_n}\mathrm{e}^{(a_i-a_n)x} \to 0$. On en déduit que $\lambda_n = 0$. Par une récurrence immédiate, on obtient $\lambda_{n-1} = \cdots = \lambda_0 = 0$. Finalement, la famille $(f_{a_i})_{i \in [\![1;n]\!]}$ est libre.

Remarque : on pouvait se dispenser de la récurrence immédiate et faire un raisonnement par l'absurde « global ». Si la combinaison linéaire nulle $\sum \lambda_i f_{a_i}$ n'est pas triviale, on singularise l'indice maximal dont le coefficient est non nul, il prend le rôle de n dans ce qui est écrit.

Exercice n° 14

— Pour $n = 1$ la famille est (ln) qui est libre (car $\ln \neq 0$) ;
— Pour $n = 2$, soit une combinaison linéaire nulle de $(\ln, (x \mapsto \ln(2x))$: $\forall x > 0,\ \alpha\ln(x) + \beta\ln(2x) = 0$. En prenant $x = 1$ puis $x = \frac{1}{2}$ on obtient $\beta = 0$ puis $\alpha = 0$ et la famille est libre.

— Pour $n = 3$. Pour tout $x > 0$ on a $\ln(2x) = \ln(2) + \ln(x)$ et :

$$\ln(3x) = \ln(3) + \ln(x) = \frac{\ln(3)}{\ln(2)}(\underbrace{\ln(2) + \ln(x)}_{\ln(2x)}) + (1 - \frac{\ln(3)}{\ln(2)})\ln(x)$$

Donc $\forall x > 0,\ (1 - \frac{\ln(3)}{\ln(2)})\ln(x) + \frac{\ln(3)}{\ln(2)}\ln(2x) + (-1)\ln(3x) = 0$ ce qui prouve que $(\ln; (x \mapsto \ln(2x)); (x \mapsto \ln(3x))$ est liée.

— Pour $n > 3$, la famille considérée est une sur-famille de $(\ln; (x \mapsto \ln(2x)); (x \mapsto \ln(3x))$ qui est liée, elle est donc également liée.

Remarque : on a montré que, pour $n \geq 2$ la famille considérée génère le plan vectoriel $\mathrm{Vect}((x \mapsto 1); \ln)$.

Exercice n° 15

Soit une famille finie de $\mathbb{K}[X]$: $(P_1, \dots P_n)$. Pour tout $(\lambda_i)_{i \in [\![1;n]\!]} \in \mathbb{K}^n$, le degré de $\sum_{i=1}^n \lambda_i P_i$ est inférieur ou égal à $\max(\deg(P_1), \dots, \deg(P_n))$ que l'on note r.
Si $r = -\infty$ alors $1 \notin \mathrm{Vect}(P_i, i \in [\![1;n]\!])$ (qui est alors $\{0\}$), si $r \in \mathbb{N}$ alors $X^{r+1} \notin \mathrm{Vect}(P_i, i \in [\![1;n]\!])$.
Dans tous les cas, la famille n'est pas génératrice de $\mathbb{K}[X]$.
Finalement, $\mathbb{K}[X]$ n'admet pas de famille génératrice finie.

3 Démontrer les résultats du cours

Exercice n° 16

Notons $\mathcal{F} = (\vec{f_1}; \dots; \vec{f_n})$.

1. Si $\mathcal{F}$ est liée alors il existe une combinaison linéaire nulle non triviale de ses vecteurs, c'est-à-dire qu'il existe $(\lambda_1; \dots; \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ avec $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \neq (0; \dots; 0)$ tel que $\lambda_1 \vec{f_1} + \dots + \lambda_n \vec{f_n} = \vec{0}$.
   Une sur-famille de $\mathcal{F}$ est de la forme $\widehat{\mathcal{F}} = (\vec{f_1}; \dots; \vec{f_n}; \vec{f_{n+1}}; \dots; \vec{f_r})$ avec $r \geq r + 1$.
   On a $\lambda_1 \vec{f_1} + \dots + \lambda_n \vec{f_n} + 0\vec{f_{n+1}} + \dots + 0\vec{f_r} = \vec{0}$ qui est une combinaison linéaire nulle et non triviale de $\widehat{\mathcal{F}}$, c'est donc une famille liée.
2. Supposons que $\mathcal{F}$ soit libre et soit $\mathcal{F}'$ une sous-famille de $\mathcal{F}$, ce qui revient à dire que $\mathcal{F}$ est une sur-famille de $\mathcal{F}'$. Si $\mathcal{F}'$ était liée alors $\mathcal{F}$ le serait également, en vertu de la uestion précédente. Or, $\mathcal{F}$ est libre donc $\mathcal{F}'$ est également libre.

Exercice n° 17

Soit $(P_1; \dots; P_n)$ une famille de polynômes non nuls qui est échelonnée en degrés, c'est-à-dire telle que $0 \leq \deg(P_1) < \dots < \deg(P_n)$. Soit une combinaison linéaire nulle de cette famille, c'est-à-dire des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $\lambda_1 P_1 + \dots \lambda_n P_n = 0$.
Raisonnons par l'absurde et supposons que cette combinaison linéaire nulle soit non triviale, c'est-à-dire que les λ_i ne sont pas tous nuls. Soit alors $r = \max(i \in [\![1;n]\!] \ / \ \lambda_i \neq 0)$. On a :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i = \sum_{i<r} \lambda_i P_i \ + \ \underbrace{\lambda_r}_{\neq 0} P_r \ + \sum_{i>r} \underbrace{\lambda_i}_{=0} P_i = \underbrace{\sum_{i<r} \lambda_i P_i}_{\deg < \deg(P_r)} \ + \ \underbrace{\lambda_r P_r}_{\deg = \deg(P_r)}$$

Ce polynôme est de degré $r \geq 0$ ce qui est absurde car il est supposé nul.
Finalement, la famille est libre.

Exercice n° 18

$\mathrm{Vect}\left((\vec{e_i})_{1 \leq i \leq r}\right)$ et $\mathrm{Vect}\left((\vec{e_i})_{r < i \leq n}\right)$ sont des SEV de E (puisque ce sont des Vect).
Tout vecteur de E s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire des vecteurs de la base $\mathcal{B}$, c'est-à-dire comme somme d'un vecteur de $\mathrm{Vect}\left((\vec{e_i})_{1 \leq i \leq r}\right)$ et d'un vecteur $\mathrm{Vect}\left((\vec{e_i})_{r < i \leq n}\right)$ ce qui prouve que ces deux sous-espaces sont supplémentaires dans E.

4 Plus difficile...

Exercice n° 19

$\Longrightarrow$: supposons que $(\vec{x};\vec{y};\vec{z})$ soit libre. Soit $(\alpha;\beta;\gamma)\in\mathbb{K}^3$ tel que $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=\vec{0}$.
On a alors :

$$\alpha(\vec{x}+\vec{y})+\beta(\vec{y}+\vec{z})+\gamma(\vec{z}+\vec{x})=\vec{0} \iff (\alpha+\gamma)\vec{x}+(\alpha+\beta)\vec{y}+(\beta+\gamma)\vec{z}=\vec{0}$$

Comme $(\vec{x};\vec{y};\vec{z})$ est libre, on en déduit $\begin{cases}\alpha+\gamma=0\\ \alpha+\beta=0\\ \beta+\gamma=0\end{cases} \iff \begin{cases}\alpha=0\\ \beta=0\\ \gamma=0\end{cases}$ est donc $(\vec{a};\vec{b};\vec{c})$ est libre.

$\Longleftarrow$: Supposons que $(\vec{a};\vec{b};\vec{c})$ soit libre. Soit $(\alpha;\beta;\gamma)\in\mathbb{K}^3$ tel que $\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}+\gamma\vec{z}=\vec{0}$. On a :

$$\begin{aligned}
\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}+\gamma\vec{z}=\vec{0} &\iff \alpha(\vec{a}-\vec{y})+\beta(\vec{b}-\vec{z})+\gamma(\vec{c}-\vec{x})=\vec{0}\\
&\iff \alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}-(\alpha\vec{y}+\beta\vec{z}+\gamma\vec{x})=\vec{0}\\
&\iff \alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}-(\alpha(\vec{b}-\vec{z})+\beta(\vec{c}-\vec{x})+\gamma(\vec{a}-\vec{y}))=\vec{0}\\
&\iff (\alpha-\gamma)\vec{a}+(\beta-\alpha)\vec{b}+(\gamma-\beta)\vec{c}+\alpha\vec{z}+\beta\vec{x}+\gamma\vec{y}=\vec{0}\\
&\iff (\alpha-\gamma)\vec{a}+(\beta-\alpha)\vec{b}+(\gamma-\beta)\vec{c}+\alpha(\vec{c}-\vec{x})+\beta(\vec{a}-\vec{y})+\gamma(\vec{b}-\vec{z})=\vec{0}\\
&\iff (\alpha-\gamma+\beta)\vec{a}+(\beta-\alpha+\gamma)\vec{b}+(\gamma-\beta+\alpha)\vec{c}-(\underbrace{\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}+\gamma\vec{z}}_{=\vec{0}})=\vec{0}
\end{aligned}$$

La famille $(\vec{a};\vec{b};\vec{c})$ étant libre, on a : $\begin{cases}\alpha+\beta-\gamma=0\\ -\alpha+\beta+\gamma=0\\ \alpha-\beta+\gamma=0\end{cases} \iff \begin{cases}\alpha=0\\ \beta=0\\ \gamma=0\end{cases}$. La famille $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ est donc libre.

Finalement, $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ est libre si, et seulement si, $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ est libre.