

Chapitre 14 - Analyse asymptotique - Exercices

1 Applications directes du cours

Exercice n° 1

Comparaison de suites et de fonctions

1. Justifier qu'un $o(5n^3)$ est un $o(n^3)$.
2. Justifier qu'un $o(n^3)$ est un $o(n^4)$. La réciproque est-elle vraie ?
3. Compléter de la façon la plus simple possible les expressions suivantes :
 $O(n^2) + 3n^3 + O(n) + O(\frac{1}{n}) = O(\dots)$; $o(n) + o(n^2) + o(n^3) = o(\dots)$
4. Prouver que $n^2 \sim n^2 + n$. A-t-on $\exp(n^2) \sim \exp(n^2 + n)$?
5. Donner un exemple qui illustre que l'équivalence n'est pas compatible avec l'addition.
6. Donner des équivalents simples de $f(x) = x^2 + 5x + e^{-2x}$ en $-\infty$, en 0 puis en $+\infty$.
7. Donner un équivalent le plus simple possible de $\cos(\sin(x))$ en 0.

Exercice n° 2

Obtenir un développement limité

1. Rappeler le $DL_5(0)$ de $\exp$. En déduire le $DL_5(0)$ de $\sinh$. Justifier comment on peut gagner gratuitement un ordre.
2. Utiliser la formule de Taylor-Young pour donner un $DL_3(1)$ de $x \mapsto e^{(x^2)}$.
3. Retrouver le résultat précédent par opérations.
4. Calculer le $DL_5(0)$ de $\tanh$ de deux façons différentes.
5. Rappeler le $DL_n(0)$ de $\frac{1}{1-x}$, en déduire celui de $\frac{1}{1+x}$, de $\frac{1}{1+x^2}$ puis celui de $\arctan x$.

Exercice n° 3

Utiliser un développement limité

1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin(x))^{\frac{1}{x}}$.
2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin(x)}}{1 + \cos(x)}$.
3. Justifier que $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Préciser l'image de 0 et le nombre dérivé en 0.
4. Déterminer l'équation de la tangente à $y = \sqrt[3]{1+x}$ au point d'abscisse 0. Préciser les positions relatives des deux courbes.
5. Donner l'asymptote de $y = \sqrt{x^2 - x + 3}$ au voisinage de $+\infty$. Préciser les positions relatives des deux courbes.

Remarque : la fonction $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ s'appelle *sinus cardinal*. Elle est en fait de classe $\mathcal{C}^\infty$ mais il faut des arguments plus sophistiqués que les DL pour le prouver.

À retenir :

- il est plus facile d'obtenir des DL par opérations avec les DL de référence plutôt que d'appliquer la formule de Taylor.
- Les DL permettent de lever des formes indéterminées (mais toutes les limites n'en sont pas).

Exercice n° 4

Dessiner les allures de $y = 3 - ex^2$ ainsi que les courbes représentatives de deux fonctions f et g qui vérifient :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 3 - ex^2 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^4) \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 3 - ex^2 - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3).$$

2 Vrai ou faux sur l'ensemble du chapitre

- a) Deux suites ayant la même limite sont équivalentes.
- b) Deux suites équivalentes ont la même limite.
- c) Toute suite est équivalente à elle-même.
- d) Si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n = o(2v_n)$.
- e) Si $u_n = O(v_n)$ alors $u_n = O(2v_n)$.
- f) Si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n = O(2v_n)$.
- g) Si la fonction f vérifie $f(x) = 5 + 4x^2 + 3x^4 + o(x^5)$ alors la fonction f est paire.
- h) La partie régulière du DL d'une fonction paire est un polynôme qui ne comporte que des monômes de degrés pairs.
- i) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dérivable. On peut se servir des développements limités pour calculer une expression de $f'(x)$.
- j) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On peut se servir des développements limités pour prouver que f est paire.
- k) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On peut se servir des développements limités pour prouver que f n'est pas paire.

3 Un peu plus dur

Exercice n° 5

Déterminer les développements limités de :

- | | |
|---|---|
| a) $x \mapsto e^{\sin(x)}$ à l'ordre 3 en 0 | b) $x \mapsto \sqrt{x}$ à l'ordre 2 en 4 |
| c) $x \mapsto \frac{1}{1+x-x^2}$ à l'ordre 5 en 0 | d) $x \mapsto e^x$ à l'ordre 3 en 1 |
| e) $x \mapsto \frac{1}{x}$ à l'ordre 3 en 1 | f) $x \mapsto \sin(\ln(\cos(x)))$ à l'ordre 3 en 0 |
| g) $x \mapsto \text{Arcsin}(x)$ à l'ordre 3 en 0 | h) $x \mapsto \sqrt{\cos(x)}$ à l'ordre 5 en 0 |
| i) $x \mapsto \ln(1 + \sin(x) - x^2)$ à l'ordre 3 en 0 | j) $x \mapsto \frac{x}{1+e^x}$ à l'ordre 3 en 0 |
| k) $x \mapsto \frac{x \cos(x)}{\sin(x)}$ à l'ordre 3 en 0 | l) $x \mapsto \frac{\sqrt[3]{\cos(x)}}{2+x^2}$ à l'ordre 3 en 0 |
| m) $x \mapsto \frac{x}{1+\sin(x)}$ à l'ordre 2 en 0 | n) $x \mapsto \frac{\sin(x)-1}{\cos(x)+1}$ à l'ordre 3 en 0 |

Exercice n° 6

Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - \sqrt[3]{x^3 + x^2}$.

Exercice n° 7

Trouver un équivalent simple de $x \mapsto \ln \frac{1-x^2}{1-\text{sh}^2 x}$ en 0.

Exercice n° 8

On considère la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x + x - 1 \end{cases}$

1. Justifier que f est bijective puis que sa réciproque f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que f^{-1} admet un $DL_2(0)$.
3. Donner le $DL_2(0)$ de f^{-1} .
4. Si vous avez utilisé la formule de Taylor à la question précédente, recommencer sans l'utiliser.

Exercice n° 9

On considère la fonction $f(x) = \frac{\sin^2(x)}{x \ln(1+x)}$.

1. Justifier qu'on peut prolonger f en une fonction dérivable sur $] -1; +\infty[$.
2. Donner l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0. Préciser les positions relatives des deux courbes.

Exercice n° 10

Trouver toutes les asymptotes de $y = \frac{x^2 \operatorname{Arctan}(x)}{x+1}$.

4 Démontrer les résultats du cours et exercices théoriques

Exercice n° 11

1. Prouver que si la fonction f admet un $DL_n(a)$ alors, pour tout $p \leq n$, f admet un $DL_p(a)$.
2. Prouver que si f est paire et admet un $DL_n(0)$ alors, la partie régulière de ce développement limité ne comporte que des monômes de degrés pairs.
3. Etudier la réciproque de la question précédente.

Exercice n° 12

1. Prouver que si g est dérivable en 0 et que $g'(x) = o(x^n)$ alors $g(x) = g(0) + o(x^{n+1})$.
2. En déduire que si $f'(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n)$ alors $f(x) = f(0) + \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + o(x^{n+1})$.

(Indice : puisqu'il est question de dérivation, on peut utiliser ...)

Exercice n° 13

Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

- a) Montrer que si $g(x) = o(f(x))$ alors $e^{g(x)} = o(e^{f(x)})$.
- b) Etudier la réciproque.

5 Plus difficile...

Exercice n° 14

Soit la fonction $f(x) = x - \ln x$.

1. Justifier qu'il existe une suite u de réels telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]0; 1] \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, f(u_n) = n$$

2. Déterminer la limite de u .
3. Déterminer un équivalent simple de u_n .

Exercice n° 15

Montrer que $\sum_{k=1}^n k! \sim n!$