Chapitre 14 - Analyse asymptotique - Exercices

Exercice n° 1

VRAI ou FAUX sur l'ensemble du chapitre.

a) Deux suites ayant la même limite sont équivalentes.
b) Deux suites équivalentes ont la même limite.
c) Toute suite est équivalente à elle-même.
d) Si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n = o(2v_n)$.
e) Si $u_n = O(v_n)$ alors $u_n = O(2v_n)$.
f) Si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n = O(2v_n)$.
g) Si la fonction f vérifie $f(x) \underset{x\to 0}{=} 5 + 4x^2 + 3x^4 + o(x^5)$ alors la fonction f est paire.
h) La partie régulière du DL d'une fonction paire est un polynôme qui ne comporte que des monômes de degrés pairs.

1 Applications directes du cours

Exercice n° 2

Comparaison de suites et de fonctions

1. Justifier qu'un $o(5n^3)$ est un $o(n^3)$.
2. Justifier qu'un $o(n^3)$ est un $o(n^4)$. La réciproque est-elle vraie ?
3. Compléter de la façon la plus simple possible les expressions suivantes :
$O(n^2) + 3n^3 + O(n) + O(\frac{1}{n}) = O(\dots)$; $o(n) + o(n^2) + o(n^3) = o(\dots)$
4. Prouver que $n^2 \sim n^2 + n$. A-t-on $\exp(n^2) \sim \exp(n^2 + n)$?
5. Donner un exemple qui illustre que l'équivalence n'est pas compatible avec l'addition.
6. Donner des équivalents simples de $f(x) = x^2 + 5x + \mathrm{e}^{-2x}$ en $-\infty$, en 0 puis en $+\infty$.
7. Donner un équivalent le plus simple possible de $\cos(\sin(x))$ en 0.

Exercice n° 3

Obtenir un développement limité

1. Rappeler le $DL_5(0)$ de exp. En déduire le $DL_5(0)$ de sh. Justifier comment on peut gagner gratuitement un ordre.
2. Utiliser la formule de Taylor-Young pour donner un $DL_3(1)$ de $x \mapsto \mathrm{e}^{(x^2)}$.
3. Retrouver le résultat précédent par opérations.
4. Calculer le $DL_5(0)$ de th de deux façons différentes.
5. Rappeler le $DL_n(0)$ de $\frac{1}{1-x}$, en déduire celui de $\frac{1}{1+x}$, de $\frac{1}{1+x^2}$ puis celui de Arctan x.

Exercice n° 4

Utiliser un développement limité

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} (1 + \sin(x))^{\frac{1}{x}}$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{\sin(x)}}{1 + \cos(x)}$.
3. Justifier que $x \longmapsto \frac{\sin(x)}{x}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
Préciser l'image de 0 et le nombre dérivé en 0.

4. Déterminer l'équation de la tangente à $y = \sqrt[3]{1+x}$ au point d'abscisse 0. Préciser les positions relatives des deux courbes.
5. Donner l'asymptote de $y = \sqrt{x^2 - x + 3}$ au voisinage de $+\infty$. Préciser les positions relatives des deux courbes.

Remarque : la fonction $x \longmapsto \frac{\sin(x)}{x}$ s'appelle *sinus cardinal*. Elle est en fait de classe $\mathcal{C}^\infty$ mais il faut des arguments plus sophistiqués que les DL pour le prouver.

À retenir :
- il est plus facile d'obtenir des DL par opérations avec les DL de référence plutôt que d'appliquer la formule de Taylor.
- Les DL permettent de lever des formes indéterminées (mais toutes les limites n'en sont pas).

2 Un peu plus dur

Exercice n° 5

Déterminer les développements limités de :

a) $x \longmapsto e^{\sin(x)}$ à l'ordre 3 en 0

b) $x \longmapsto \sqrt{x}$ à l'ordre 2 en 4

c) $x \longmapsto \frac{1}{1+x-x^2}$ à l'ordre 5 en 0

d) $x \longmapsto e^x$ à l'ordre 3 en 1

e) $x \longmapsto \frac{1}{x}$ à l'ordre 3 en 1

f) $x \longmapsto \sin(\ln(\cos(x)))$ à l'ordre 3 en 0

g) $x \longmapsto \mathrm{Arcsin}(x)$ à l'ordre 3 en 0

h) $x \longmapsto \sqrt{\cos(x)}$ à l'ordre 5 en 0

i) $x \longmapsto \ln(1+\sin(x)-x^2)$ à l'ordre 3 en 0

j) $x \longmapsto \frac{x}{1+e^x}$ à l'ordre 3 en 0

k) $x \longmapsto \frac{x\cos(x)}{\sin(x)}$ à l'ordre 3 en 0

l) $x \longmapsto \frac{\sqrt[3]{\cos(x)}}{2+x^2}$ à l'ordre 3 en 0

m) $x \longmapsto \frac{x}{1+\sin(x)}$ à l'ordre 2 en 0

n) $x \longmapsto \frac{\sin(x)-1}{\cos(x)+1}$ à l'ordre 3 de en 0

Exercice n° 6

Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x} - \sqrt[3]{x^3+x^2}$.

Exercice n° 7

Trouver un équivalent simple de $x \longmapsto \ln \dfrac{1-x^2}{1-\mathrm{sh}^2 x}$ en 0.

Exercice n° 8

On considère la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x + x - 1 \end{array} \right.$

1. Justifier que f est bijective puis que sa réciproque f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que f^{-1} admet un $DL_2(0)$.
3. Donner le $DL_2(0)$ de f^{-1}.
4. Si vous avez utilisé la formule de Taylor à la question précédente, recommencer sans l'utiliser.

Exercice n° 9

On considère la fonction $f(x) = \dfrac{\sin^2(x)}{x\ln(1+x)}$.

1. Justifier qu'on peut prolonger f en une fonction dérivable sur $]-1;+\infty[$.
2. Donner l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0. Préciser les positions relatives des deux courbes.

Exercice n° 10

Trouver toutes les asymptotes de $y = \dfrac{x^2\text{Arctan}(x)}{x+1}$.

3 Démontrer les résultats du cours et exercices théoriques

Exercice n° 11

1. Prouver que si la fonction f admet un $DL_n(a)$ alors, pour tout $p \leq n$, f admet un $DL_p(a)$.
2. Prouver que si f est paire et admet un $DL_n(0)$ alors, la partie régulière de ce développement limité ne comporte que des monômes de degrés pairs.
3. Etudier la réciproque de la question précédente.

Exercice n° 12

1. Prouver que si g est dérivable en 0 et que $g'(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^n)$ alors $g(x) \underset{x\to 0}{=} g(0) + o(x^{n+1})$.
2. En déduire que si $f'(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$ alors $f(x) \underset{x\to 0}{=} f(0) + \sum_{k=0}^{n} \dfrac{a_k}{k+1} x^{k+1} + o(x^{n+1})$.

(Indice : puisqu'il est question de dérivation, on peut utiliser ...)

Exercice n° 13

Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

a) Montrer que si $g(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(f(x))$ alors $\mathrm{e}^{g(x)} \underset{x\to+\infty}{=} o(\mathrm{e}^{f(x)})$.

b) Etudier la réciproque.

4 Plus difficile...

Exercice n° 14

Soit la fonction $f(x) = x - \ln x$.

1. Justifier qu'il existe une suite u de réels telle que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in]0;1] \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ f(u_n) = n$$
2. Déterminer la limite de u.
3. Déterminer un équivalent simple de u_n.

Exercice n° 15

Montrer que $\sum_{k=1}^{n} k! \sim n!$