

Correction des exercices du chapitre 14

Exercice n° 1

- a) Faux. $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ ont la même limite mais ne sont pas équivalentes.
- b) Vrai lorsqu'il y a une limite; mais il peut ne pas y en avoir. Par exemple $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équivalente à $((-1)^n + \frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ mais aucune de ces suites n'admet de limite.
- c) Faux. La suite nulle ne se compare pas; elle n'est donc pas équivalente à elle-même.
- d) Vrai. $u_n = o(v_n)$ signifie $\frac{u_n}{v_n} \rightarrow 0$ ce qui entraîne que $\frac{u_n}{2v_n} \rightarrow 0$.
- e) Vrai. $u_n = O(v_n)$ signifie que $(\frac{u_n}{v_n})_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée à partir d'un certain rang : il existe $A > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \rightarrow |\frac{u_n}{v_n}| \leq A$. On a alors, pour $n \geq N, |\frac{u_n}{2v_n}| \leq \frac{A}{2}$ c'est-à-dire que $u_n = O(2v_n)$.
- f) Vrai. $u_n = o(v_n)$ signifie $\frac{u_n}{v_n} \rightarrow 0$ qui implique $\frac{u_n}{2v_n} \rightarrow 0$. Une suite convergente est bornée, on a donc $u_n = O(2v_n)$.
- g) Faux. Par exemple, la fonction définie par $f(x) = 5 + 4x^2 + 3x^4 + x^7$ vérifie $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 5 + 4x^2 + 3x^4 + o(x^5)$ mais elle n'est pas paire car $f(1) = 13$ et $f(-1) = 11$.
- h) Faux (en général) si on considère un DL qui n'est pas en 0. Par exemple, le DL₁ de $f : x \mapsto x^2$ en 1 est : $f(1+h) = 1 + 2h + o(h)$.

1 Applications directes du cours

Exercice n° 2

1. Soit une suite u telle que $u_n = o(5n^3)$. Cela signifie que $\frac{u_n}{5n^3} \rightarrow 0$ ce qui, par opérations, entraîne que $\frac{u_n}{n^3} \rightarrow 0$. Autrement dit, $u_n = o(n^3)$.
2. Soit une suite u telle que $u_n = o(n^3)$. Cela signifie que $\frac{u_n}{n^3} \rightarrow 0$. Comme $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, par opérations, on a $\frac{u_n}{n^4} \rightarrow 0$. Autrement dit, $u_n = o(n^4)$.
La réciproque est fautive. Par exemple : $n^{3,5} = o(n^4)$ mais $(n^{3,5})_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas négligeable devant n^3 car $\frac{n^{3,5}}{n^3} = \sqrt{n} \rightarrow +\infty$.
3. Compléter de la façon la plus simple possible les expressions suivantes :
 $O(n^2) + 3n^3 + O(n) + O(\frac{1}{n}) = O(n^3)$; $o(n) + o(n^2) + o(n^3) = o(n^3)$
4. On a, $\forall n > 0, \frac{n^2+n}{n^2} = 1 + \frac{1}{n} \rightarrow 1$. Autrement dit : $n^2 \sim n^2 + n$.
On a, $\forall n > 0, \frac{e^{n^2+n}}{e^{n^2}} = e^n \rightarrow +\infty$ donc $\exp(n^2)$ n'est pas équivalent à $\exp(n^2 + n)$.
5. On a $n^2 + n \sim n^2 + 1$ et $-n^2 \sim -n^2$ mais pourtant n n'est pas équivalent à 1.
6. On a : $f(x) \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} e^{-2x}, f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$ et $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2$.
7. On a $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ donc $\cos(\sin x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$.

Exercice n° 3

1. On a $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$ donc $e^{-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120} + o(x^5)$.
Il suit que $\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$.
Comme sh est impaire, ses DL(0) ne comportent que des monômes de degré impair. Il suit que le DL₆(0) de sh est $\text{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)$.

2. On a : $\frac{de^{x^2}}{dx} = 2xe^{x^2}$, $\frac{d^2e^{x^2}}{dx^2} = (4x^2 + 2)e^{x^2}$ et $\frac{d^3e^{x^2}}{dx^3} = (8x^3 + 12x)e^{x^2}$.

La formule de Taylor-Young donne :

$$e^{x^2} \underset{x \rightarrow 1}{=} e^{(1+h)^2} \underset{h \rightarrow 0}{=} e + h \times 2e + \frac{h^2}{2} \times 6e + \frac{h^3}{6} \times 20e + o(h^3) \underset{h \rightarrow 0}{=} e \left(1 + 2h + 3h^2 + \frac{10}{3}h^3 \right) + o(h^3).$$

3. On a, pour tout réel h : $e^{(1+h)^2} = e^{1+2h+h^2} = e \times (e^h)^2 \times e^{h^2}$. Il suit que :

$$e^{(1+h)^2} \underset{h \rightarrow 0}{=} e \times \left(1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} \right)^2 \times \left(1 + h^2 + \frac{(h^2)^2}{2} + \frac{(h^2)^3}{6} \right) + o(h^3)$$

$$\underset{h \rightarrow 0}{=} e \times \left(1 + 2h + 2h^2 + \frac{4}{3}h^3 \right) \times (1 + h^2) + o(h^3)$$

$$\underset{h \rightarrow 0}{=} e \times \left(1 + 2h + 3h^2 + \frac{10}{3}h^3 \right) + o(h^3)$$

4. On peut utiliser la formule de Taylor ou procéder par opérations à l'aide des DL de sh, ch et de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$. On trouve : $\text{th}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$.

5. Pour tout $n \geq 0$ on a : $\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n)$. Il suit que :

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-x)^k + o((-x)^n) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n)$$

Puis, $\frac{1}{1+x^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k x^{2k} + o(x^n)$.

On peut intégrer ce DL pour obtenir celui de Arctan (à l'ordre $n+1$) :

$$\text{Arctan}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \text{Arctan}(0) + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + o(x^{n+1}) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + o(x^{n+1})$$

Exercice n° 4

1. Pour $x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ on a $\sin(x) > -1$ et donc $1 + \sin(x) > 0$. Il suit que $(1 + \sin(x))^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \ln(1 + \sin(x))}$ est définie sur $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\setminus \{0\}$.

On a : $\ln(1+u) \underset{u \rightarrow 0}{=} u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$ et $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x^2)$ donc, par composition des développements limités : $\ln(1 + \sin(x)) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ puis $\frac{1}{x} \ln(1 + \sin(x)) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + o(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$.

Par substitution (composition à gauche), il vient $(1 + \sin(x))^{\frac{1}{x}} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} e$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin(x))^{\frac{1}{x}} = e$.

2. Par opérations sur les limites, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x}}{1 + \cos x} = \frac{1}{2}$.

3. On a : $\frac{\sin(x)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)$. La fonction $f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ admet un DL à l'ordre 1 en 0, elle se prolonge donc en une fonction dérivable en posant $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$. Pour s'assurer que f est de classe \mathcal{C}^1 il faut vérifier que $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f'(0) = 0$.

On a :

$$\forall x \neq 0, f'(x) = \frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x - \frac{x^3}{2} - (x - \frac{x^3}{6}) + o(x^3)}{x^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x}{3} + o(x) \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} 0$$

4. On a : $\sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{3}} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + o(x)^2$.

On en déduit que l'équation réduite de la tangente à $y = \sqrt[3]{1+x}$ au point d'abscisse 0 est

$$y = 1 + \frac{1}{3}x.$$

On a : $1 + \frac{1}{3}x - \sqrt[3]{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{9}x^2 + o(x)^2$ qui est positif au voisinage de 0 donc et la tangente est au-dessus de la courbe au voisinage du point d'abscisse 0.

5. On a $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 3 > 0$ et donc $\sqrt{x^2 - x + 3}$ est bien défini sur \mathbb{R} et, en particulier, au voisinage de $+\infty$.

On a : $\forall x > 0, \sqrt{x^2 - x + 3} = x \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}$. Comme $\sqrt{1+u} = (1+u)^{\frac{1}{2}} \underset{u \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{u}{2} - \frac{1}{8}u^2 + o(u^2)$

on a :

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - x + 3} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} & x \left(1 + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} \right) - \frac{1}{8} \left(-\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} \right)^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) \\ \underset{x \rightarrow +\infty}{=} & x \left(1 - \frac{1}{2x} + \frac{13}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) \\ \underset{x \rightarrow +\infty}{=} & x - \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{13}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right)}_{>0 \text{ au vois. de } +\infty} \end{aligned}$$

On en déduit que l'asymptote de $y = \sqrt{x^2 - x + 3}$ au voisinage de $+\infty$ est la droite d'équation réduite $y = x - \frac{1}{2}$ et que l'asymptote est sous la courbe.

2 Un peu plus dur

Exercice n° 5

a) $e^{\sin(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} e^{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$

b) $\sqrt{x} = \sqrt{4+h} = 2\sqrt{1+\frac{h}{4}} = 2\left(1 + \frac{h}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \underset{h \rightarrow 0}{=} 2 + \frac{h}{4} - \frac{h^2}{8} + o(h^2) \underset{x \rightarrow 4}{=} 2 + \frac{x-4}{4} - \frac{(x-4)^2}{8} + o((x-4)^2)$

c) $\frac{1}{1+x-x^2} = \frac{1}{1-(x^2-x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + 2x^2 - 3x^3 + 5x^4 - 8x^5 + o(x^5)$

d) $e^x = e^{1+h} = e \times e^h \underset{h \rightarrow 0}{=} e\left(1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6}\right) + o(h^3) \underset{x \rightarrow 1}{=} e\left(1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6}\right) + o(h^3)$

e) $\frac{1}{x} = \frac{1}{1+h} \underset{h \rightarrow 0}{=} 1 - h + h^2 + o(h^2) \underset{x \rightarrow 1}{=} 1 - (x-1) + (x-1)^2 + o((x-1)^2)$

f) $\sin(\ln(\cos x)) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sin(\ln(1 - \frac{x^2}{2})) + o(x^3) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sin(-\frac{x^2}{2}) + o(x^3) \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^2}{2} + o(x^3)$

g) Plusieurs stratégies sont possibles pour le DL d'Arcsin : intégrer le DL de la dérivée (qu'on obtient avec un DL de référence), utiliser $\text{Arcsin} \circ \sin = \text{Id}$ puis composer les DL pour en déduire celui d'Arcsin et, bien entendu, la formule de Taylor-Young. On trouve $\text{Arcsin}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

h) $\sqrt{\cos(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^{\frac{1}{2}} + o(x^5) \underset{x \rightarrow 0}{=} \left(1 + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)\right)^{\frac{1}{2}} + o(x^5)$
 $\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) - \frac{1}{8}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 + o(x^5)$
 $\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{96} + o(x^5)$

i) $\ln(1 + \sin(x) - x^2) \underset{x \rightarrow 0}{=} \ln\left(1 + \left(x - x^2 - \frac{x^3}{6}\right)\right) + o(x^3)$
 $\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(x - x^2 - \frac{x^3}{6}\right) - \frac{1}{2}\left(x - x^2 - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x - x^2 - \frac{x^3}{6}\right)^3 + o(x^3)$
 $\underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{6}x^3 + o(x^3)$

$$j) \frac{x}{1+e^x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x}{2+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x}{2} \times \frac{1}{1+(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12})} + o(x^3) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + o(x^3)$$

$$k) \frac{x \cos x}{\sin x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3))}{x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)} \underset{x \rightarrow 0}{=} (1-\frac{x^2}{2}) \times \frac{1}{1-\frac{x^2}{6}} + o(x^3) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{3} + o(x^3)$$

$$l) \frac{\sqrt[3]{\cos x}}{2+x^2} = \frac{(1-\frac{x^2}{2})^{\frac{1}{3}}}{2(1+\frac{x^2}{2})} + o(x^3) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2} - \frac{x^2}{3} + o(x^2).$$

$$m) \frac{x}{1+\sin x} \underset{x \rightarrow 0}{=} x - x^2 + o(x^2)$$

$$n) \frac{\sin(x)-1}{\cos(x)+1} \underset{x \rightarrow 0}{=} (-1+x-\frac{x^3}{6}) \times \frac{1}{2(1-\frac{x^2}{4})} + o(x^3) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2}(-1+x-\frac{x^3}{6})(1+\frac{x^2}{4}) + o(x^3)$$

$$\underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{1}{2} + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{24} + o(x^3)$$

Exercice n° 6

On a, pour tout $x > 0$:

$$\sqrt{x^2+x} - \sqrt[3]{x^3+x^2} = x \left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}} \right) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} x \left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{6} + o(1)$$

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+x} - \sqrt[3]{x^3+x^2} = \frac{1}{6}$.

Exercice n° 7

Pour trouver un équivalent en 0 de $x \mapsto \ln\left(\frac{1-x^2}{1-\operatorname{sh}^2 x}\right)$ on en fait un DL. La subtilité, ici, est que le premier monôme non nul de la partie régulière est de degré 4. On trouve : $\ln\left(\frac{1-x^2}{1-\operatorname{sh}^2 x}\right) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{3}x^4$.

Exercice n° 8

1. f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^x + 1 > 0$ donc f est strictement croissante et elle réalise une bijection de \mathbb{R} vers $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ (les limites de f s'obtiennent sans difficulté par opérations).

Comme f' ne s'annule pas, on en déduit que la bijection réciproque f^{-1} est aussi de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

2. En vertu de la formule de Taylor-Young, f^{-1} admet un $DL_2(0)$.

3. Soit $a_0 + a_1x + a_2x^2$ la partie régulière du $DL_2(0)$ de f^{-1} . On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{-1} \circ f(x) = x$ et donc, en particulier $f^{-1} \circ f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x$. Or, $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 2x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ et comme $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} 0$ on peut composer les DL. Il vient :

$$x \underset{x \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1\left(2x + \frac{x^2}{2}\right) + a_2\left(2x + \frac{x^2}{2}\right)^2 + o(x^2) \implies x = a_0 + 2a_1x + x^2\left(\frac{a_1}{2} + 4a_2\right)$$

On identifie les coefficients et il vient $a_0 = 0$, $a_1 = \frac{1}{2}$ et $a_2 = -\frac{1}{16}$.

Finalement, $f^{-1}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x}{2} - \frac{x^2}{16} + o(x^2)$.

Remarque : on pouvait aussi composer dans l'autre sens.

Exercice n° 9

On considère la fonction $f(x) = \frac{\sin^2 x}{x \ln(1+x)}$.

1. f n'est pas définie en 0 mais est clairement de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -1; 0[$ et sur $]0; +\infty[$. Reste à étudier le recollement en 0, ce que l'on fait à l'aide d'un DL.

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{(x-\frac{x^3}{6})^2+o(x^8)}{x} \times \frac{1}{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x^2+o(x^3)}{x^2(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2))} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1+o(x)}{1-\frac{x}{2}+o(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x}{2} + o(x)$$

f admet donc un $DL_1(0)$ elle peut donc être prolongée en une fonction dérivable sur $] -1; +\infty[$.

2. Le DL donné précédemment permet de lire l'équation réduite de la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse 0 : $y = 1 + \frac{x}{2}$. En revance, pour préciser les positions relatives des deux courbes, on a besoin d'un ordre supérieur. On reprend le calcul :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)}{x^2(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2))} = \frac{1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2)}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)} = (1 - \frac{x^2}{3})(1 + (\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3}) + (\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3})^2) + o(x^2) \\ &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{5}{12}x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

Comme $-\frac{5}{12}x^2 + o(x^2) \leq 0$ au voisinage de 0, on en déduit que la courbe est au-dessous de sa tangente au point d'abscisse 0.

Exercice n° 10

La fonction $x \mapsto \frac{x^2 \operatorname{Arctan}(x)}{x+1}$ n'est pas définie pour $x = -1$ et les limites en -1^\pm sont infinies. On en déduit que la droite verticale d'équation réduite $x = -1$ est asymptote à la courbe d'équation $y = \frac{x^2 \operatorname{Arctan}(x)}{x+1}$.

Cherchons à présent des asymptotes en $\pm\infty$:

— En $+\infty$: en posant, pour $x > 0$, $x = \frac{1}{h}$ on a $\frac{x^2 \operatorname{Arctan}(x)}{x+1} = \frac{\operatorname{Arctan}(\frac{1}{h})}{h^2(1+\frac{1}{h})} = \frac{\operatorname{Arctan}(\frac{1}{h})}{h(1+h)}$

Or, pour $h > 0$ on a $\operatorname{Arctan}(h) + \operatorname{Arctan}(\frac{1}{h}) = \frac{\pi}{2}$ il suit :

$$\frac{\operatorname{Arctan}(\frac{1}{h})}{h(1+h)} = \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(h)}{h(1+h)} = \frac{1}{h} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(h) \right) \frac{1}{1+h}$$

On fait un DL pour $h \rightarrow 0$:

$$\frac{1}{h} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(h) \right) \frac{1}{1+h} \underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{1}{h} \left(\frac{\pi}{2} - h + \frac{h^3}{6} \right) (1 - h + h^2 - h^3) + o(h^2) \underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{1}{h} \left(\frac{\pi}{2} - h(1 + \frac{\pi}{2}) + o(h) \right)$$

On repasse à $x = \frac{1}{h}$ et on a : $\frac{x^2 \operatorname{Arctan}(x)}{x+1} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} -1 - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}x + o(1)$.

On en conclut que $y = -1 - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}x$ est asymptote à $y = \frac{x^2 \operatorname{Arctan}(x)}{x+1}$ en $+\infty$.

- En $-\infty$, on procède de façon similaire et, en gardant en mémoire que pour $h > 0$ on a $\operatorname{Arctan}(h) + \operatorname{Arctan}(\frac{1}{h}) = \frac{\pi}{2}$ on obtient que $y = -\frac{\pi}{2}x - 1 + \frac{\pi}{2}$ est asymptote à la courbe.

Remarque : : pour avoir les positions relatives de la courbe et ses asymptotes, il aurait fallu...

3 Démontrer les résultats du cours et exercices théoriques

Exercice n° 11

1. Soit $0 \leq p < n$ et une fonction f qui admette un $DL_n(a)$.

Il existe des réels b_0, \dots, b_n tels que $f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} b_0 + b_1h + \dots + b_ph^p + \dots + b_nh^n + o(h^n)$.

En remarquant que, pour tout $k \in \llbracket p+1; n \rrbracket$ on a $h^k \underset{h \rightarrow 0}{=} o(h^p)$ et qu'une fonction négligeable devant h^n l'est devant h^p lorsque $h \rightarrow 0$ on a : $f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} b_0 + b_1h + \dots + b_ph^p + o(h^p)$ et donc f admet un $DL_p(a)$.

2. Soit n un entier naturel et une fonction paire f qui admette un $DL_n(0)$.

Il existe des réels a_0, \dots, a_n tels que $f(h) \underset{h \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1h + \dots + a_nh^n + o(h^n)$.

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un entier impair $2k+1 \leq n$ tel que $a_{2k+1} \neq 0$, on peut aussi supposer que $2k+1$ est le plus petit des entiers qui vérifie cela. On a donc :

$$\begin{aligned} f(h) &= a_0 + a_2h^2 + \dots + a_{2k}h^{2k} + a_{2k+1}h^{2k+1} + \dots + a_nh^n + o(h^n) \\ &= a_0 + a_2h^2 + \dots + a_{2k}h^{2k} + a_{2k+1}h^{2k+1} + o(h^{2k+1}) \end{aligned}$$

et donc $f(h) - (a_0 + a_2h^2 + \dots + a_{2k}h^{2k}) \underset{h \rightarrow 0}{=} a_{2k+1}h^{2k+1} + o(h^{2k+1})$. L'expression à gauche étant une fonction paire et continue (puisqu'elle admet un DL) de h , son signe à gauche et à droite de 0 est le même. Or, l'expression à droite est impaire et son signe change en 0. On a donc une absurdité.

Finalement, si f est paire et admet un $DL_n(0)$ alors, la partie régulière de ce développement limité ne comporte que des monômes de degrés pairs.

3. La réciproque est fautive. La fonction $f(x) = 1 + x^2 + x^3$ vérifie $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x^2 + o(x^2)$ mais elle n'est pas paire.

Exercice n° 12

1. Soit g est dérivable en 0 telle que $g'(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^n)$. g étant dérivable au voisinage de 0, on peut appliquer le TAF : pour x voisin de 0, il existe c entre 0 et x tel que $g'(c) = \frac{g(x) - g(0)}{x}$ ce qui est équivalent à $g(x) = g(0) + xg'(c)$.

En écrivant $\frac{g'(c)}{x^n} = \frac{g'(c)}{c^n} \times \left(\frac{c}{x}\right)^n$ et en utilisant l'hypothèse sur g on a $g'(c) \underset{x \rightarrow 0}{=} x^n$ et donc, il suit que $g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} g(0) + o(x^{n+1})$.

2. Soit $g(x) = f(x) - \left(f(0) + \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}\right)$.

La fonction $g(x)$ vérifie les conditions de la question précédente et cela donne le résultat voulu.

Exercice n° 13

Soit f et g deux fonctions définies sur \mathbb{R} telle que

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ donc, pour x assez grand, $f(x) > 0$ et on peut diviser par $f(x)$.

On a alors :

$$\frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}} = e^{f(x)-g(x)} = e^{f(x)\left(\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right)}$$

Or $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ donc $\frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

Finalement, $e^{g(x)} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(e^{f(x)})$.

- b) La réciproque est fautive : avec $f(x) = 2x$ et $g(x) = x$ on a $e^{g(x)} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(e^{f(x)})$ mais $g(x)$ n'est pas négligeable devant $f(x)$ en $+\infty$.

4 Plus difficile...

Exercice n° 14

1. $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$ et $\forall x \in]0; 1]$, $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} \leq 0$ avec $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
On en déduit que f est strictement décroissante sur $]0; 1]$ et réalise une bijection de $]0; 1]$ sur $f(]0; 1]) = [f(1); \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)[= [1; +\infty[$ (puisque f est continue).
On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique antécédent à n par f dans $]0; 1]$, on le nomme u_n .
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f(e^{-n}) = e^{-n} + n < n + 1 = f(u_{n+1})$.
La fonction f étant strictement décroissante sur $]0; 1]$ on a $u_{n+1} < e^{-n}$, on en déduit que $u_n \rightarrow 0$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n - \ln(u_n) = n \iff e^{u_n - \ln(u_n)} = e^n \iff e^{u_n} = u_n e^n$.
Or, $u_n \rightarrow 0$ donc $u_n e^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ et $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{e^n}$.

Exercice n° 15

On a : $\forall n \geq 3$, $\frac{\sum_{k=1}^n k}{n!} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{\sum_{k=1}^{n-2} k!}{n!}$. Or,

$$\frac{1}{n} \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad 0 \leq \frac{\sum_{k=1}^{n-2} k!}{n!} \leq \underbrace{\sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{(n-2)^2}}_{= \frac{1}{n-2} \longrightarrow 0}$$

On en déduit que $\sum_{k=1}^n k! \sim n!$