Correction des exercices du chapitre 14

Exercice n° 1

a) Faux. $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ ont la même limite mais ne sont pas équivalentes.

b) Vrai lorsqu'il y a une limite ; mais il peut ne pas y en avoir. Par exemple $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à $((-1)^n + \frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ mais aucune de ces suites n'admet de limite.

c) Faux. La suite nulle ne se compare pas ; elle n'est donc pas équivalente à elle-même.

d) Vrai. $u_n = o(v_n)$ signifie $\frac{u_n}{v_n} \to 0$ ce qui entraine que $\frac{u_n}{2v_n} \to 0$.

e) Vrai. $u_n = O(v_n)$ signifie que $(\frac{u_n}{v_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée à partir d'un certain rang : il existe $A > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \longrightarrow |\frac{u_n}{v_n}| \leq A$. On a alors, pour $n \geq N$, $|\frac{u_n}{2v_n}| \leq \frac{A}{2}$ c'est-à-dire que $u_n = O(2v_n)$.

f) Vrai. $u_n = o(v_n)$ signifie $\frac{u_n}{v_n} \to 0$ qui implique $\frac{u_n}{2v_n} \to 0$. Une suite convergente est bornée, on a donc $u_n = O(2v_n)$.

g) Faux. Par exemple, la fonction définie par $f(x) = 5 + 4x^2 + 3x^4 + x^7$ vérifie $f(x) \underset{x\to 0}{=} 5 + 4x^2 + 3x^4 + o(x^5)$ mais elle n'est pas paire car $f(1) = 13$ et $f(-1) = 11$.

h) Faux (en général) si on considère un DL qui n'est pas en 0. Par exemple, le DL_1 de $f : x \mapsto x^2$ en 1 est : $f(1 + h) = 1 + 2h + o(h)$.

1 Applications directes du cours

Exercice n° 2

1. Soit une suite u telle que $u_n = o(5n^3)$. Cela signifie que $\frac{u_n}{5n^3} \to 0$ ce qui, par opérations, entraine que $\frac{u_n}{n^3} \to 0$. Autrement dit, $u_n = o(n^3)$.
2. Soit une suite u telle que $u_n = o(n^3)$. Cela signifie que $\frac{u_n}{n^3} \to 0$. Comme $\frac{1}{n} \to 0$, par opérations, on a $\frac{u_n}{n^4} \to 0$. Autrement dit, $u_n = o(n^4)$.
   La réciproque est fausse. Par exemple : $n^{3,5} = o(n^4)$ mais $(n^{3,5})_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas négligeable devant n^3 car $\frac{n^{3,5}}{n^3} = \sqrt{n} \to +\infty$.
3. Compléter de la façon la plus simple possible les expressions suivantes :
   $O(n^2) + 3n^3 + O(n) + O(\dfrac{1}{n}) = O(n^3) \quad ; \quad o(n) + o(n^2) + o(n^3) = o(n^3)$
4. On a, $\forall n > 0$, $\frac{n^2+n}{n^2} = 1 + \frac{1}{n} \to 1$. Autrement dit : $n^2 \sim n^2 + n$.
   On a, $\forall n > 0$, $\frac{\mathrm{e}^{n^2+n}}{\mathrm{e}^{n^2}} = \mathrm{e}^n \to +\infty$ doncexp(n^2) n'est pas équivalent à $\exp(n^2 + n)$.
5. On a $n^2 + n \sim n^2 + 1$ et $-n^2 \sim -n^2$ mais pourtant n n'est pas équivalent à 1.
6. On a : $f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-2x}$, $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1$ et $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$.
7. On a $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ donc $\cos(\sin x) \underset{x\to 0}{\sim} \cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1$.

Exercice n° 3

1. On a $\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$ donc $\mathrm{e}^{-x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120} + o(x^5)$.
   Il suit que $\mathrm{sh}(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$.
   Comme sh est impaire, ses $DL(0)$ ne comportent que des monômes de degré impair. Il suit que le $DL_6(0)$ de sh est $\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)$.

2. On a : $\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{x^2}}{\mathrm{d}x} = 2x\mathrm{e}^{x^2}$, $\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{e}^{x^2}}{\mathrm{d}x^2} = (4x^2+2)\mathrm{e}^{x^2}$ et $\frac{\mathrm{d}^3\mathrm{e}^{x^2}}{\mathrm{d}x^3} = (8x^3+12x)\mathrm{e}^{x^2}$.

   La formule de Taylor-Young donne :

$$\mathrm{e}^{x^2} \underset{x\to 1}{=} \mathrm{e}^{(1+h)^2} \underset{h\to 0}{=} \mathrm{e} + h\times 2\mathrm{e} + \frac{h^2}{2}\times 6\mathrm{e} + \frac{h^3}{6}\times 20\mathrm{e} + o(h^3) \underset{h\to 0}{=} \mathrm{e}\left(1+2h+3h^2+\frac{10}{3}h^3\right) + o(h^3).$$

3. On a, pour tout réel h : $\mathrm{e}^{(1+h)^2} = \mathrm{e}^{1+2h+h^2} = \mathrm{e}\times(\mathrm{e}^h)^2\times \mathrm{e}^{h^2}$. Il suit que :

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{(1+h)^2} &\underset{h\to 0}{=} \mathrm{e}\times\left(1+h+\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{6}\right)^2 \times\left(1+h^2+\frac{(h^2)^2}{2}+\frac{(h^2)^3}{6}\right) + o(h^3)\\ &\underset{h\to 0}{=} \mathrm{e}\times\left(1+2h+2h^2+\frac{4}{3}h^3\right)\times\left(1+h^2\right) + o(h^3)\\ &\underset{h\to 0}{=} \mathrm{e}\times\left(1+2h+3h^2+\frac{10}{3}h^3\right) + o(h^3)\end{aligned}$$

4. On peut utiliser la formule de Taylor ou procéder par opérations à l'aide des DL de sh, ch et de $x\mapsto \frac{1}{1-x}$. On trouve : $\mathrm{th}(x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + o(x^5)$.

5. Pour tout $n\geq 0$ on a : $\dfrac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$. Il suit que :

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n}(-x)x^k + o((-x)^n) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k + o(x^n)$$

   Puis, $\dfrac{1}{1+x^2} \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}(-1)^k x^{2k} + o(x^n)$.

   On peut intégrer ce DL pour obtenir celui de Arctan (à l'ordre $n+1$) :

$$\mathrm{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{Arctan}(0) + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1} + o(x^{n+1}) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1} + o(x^{n+1})$$

Exercice n° 4

1. Pour $x\in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ on a $\sin(x) > -1$ et donc $1+\sin(x)>0$. Il suit que $(1+\sin(x))^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(1+\sin(x))}$ est définie sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[\setminus\{0\}$.
   On a : $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$ et $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x^2)$ donc, par composition des développements limités : $\ln(1+\sin(x)) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ puis $\frac{1}{x}\ln(1+\sin(x)) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + o(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1$.
   Par substitution (composition à gauche), il vient $(1+\sin(x))^{\frac{1}{x}} \underset{x\to 0}{\sim} \mathrm{e}$ et donc $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin(x))^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$.

2. Par opérations sur les limites, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{\sin x}}{1+\cos x} = \dfrac{1}{2}$.

3. On a : $\frac{\sin(x)}{x} \underset{x\to 0}{=} \frac{x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)}{x} \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)$. La fonction $f : x\mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ admet un DL à l'ordre 1 en 0, elle se prolonge donc en une fonction dérivable en posant $f(0)=1$ et $f'(0)=0$. Pour s'assurer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ il faut vérifier que $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = f'(0) = 0$.
   On a :

$$\forall x\neq 0,\ f'(x) = \frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^2} \underset{x\to 0}{=} \frac{x-\frac{x^3}{2}-(x-\frac{x^3}{6})+o(x^3)}{x^2} \underset{x\to 0}{=} -\frac{x}{3} + o(x) \underset{x\to 0}{\to} 0$$

4. On a : $\sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{3}} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + o(x)^2$.
   On en déduit que l'équation réduite de la tangente à $y = \sqrt[3]{1+x}$ au point d'abscisse 0 est

$y = 1 + \frac{1}{3}x$.
On a : $1 + \frac{1}{3}x - \sqrt[3]{1+x} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{9}x^2 + o(x)^2$ qui est positif au voisinage de 0 donc et la tangente est au-dessus de la courbe au voisinage du point d'abscisse 0.

5. On a $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 - x + 3 > 0$ et donc $\sqrt{x^2 - x + 3}$ est bien défini sur $\mathbb{R}$ et, en particulier, au voisinage de $+\infty$.
On a : $\forall x > 0,\ \sqrt{x^2 - x + 3} = x\sqrt{1 \underbrace{-\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}_{u}}$. Comme $\sqrt{1+u} = (1+u)^{\frac{1}{2}} \underset{u\to 0}{=} 1 + \frac{u}{2} - \frac{1}{8}u^2 + o(u^2)$
on a :

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2 - x + 3} &\underset{x\to+\infty}{=} x\left(1 + \frac{1}{2}(-\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}) - \frac{1}{8}(-\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2})^2 + o(\frac{1}{x^2})\right) \\
&\underset{x\to+\infty}{=} x\left(1 - \frac{1}{2x} + \frac{13}{8x^2} + o(\frac{1}{x^2})\right) \\
&\underset{x\to+\infty}{=} x - \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{13}{8x} + o(\frac{1}{x})}_{>0 \text{ au vois. de } +\infty}
\end{aligned}$$

On en déduit que l'asymptote de $y = \sqrt{x^2 - x + 3}$ au voisinage de $+\infty$ est la droite d'équation réduite $y = x - \frac{1}{2}$ et que l'asymptote est sous la courbe.

2 Un peu plus dur

Exercice nº 5

a) $e^{\sin(x)} \underset{x\to 0}{=} e^{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$

b) $\sqrt{x} = \sqrt{4+h} = 2\sqrt{1 + \frac{h}{4}} = 2(1 + \frac{h}{4})^{\frac{1}{2}} \underset{h\to 0}{=} 2 + \frac{h}{4} - \frac{h^2}{8} + o(h^2) \underset{x\to 4}{=} 2 + \frac{x-4}{4} - \frac{(x-4)^2}{8} + o((x-4)^2)$

c) $\frac{1}{1+x-x^2} = \frac{1}{1-(x^2-x)} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + 2x^2 - 3x^3 + 5x^4 - 8x^5 + o(x^5)$

d) $e^x = e^{1+h} = e \times e^h \underset{h\to 0}{=} e(1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6}) + o(h^3) \underset{x\to 1}{=} e(1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6}) + o(h^3)$

e) $\frac{1}{x} = \frac{1}{1+h} \underset{h\to 0}{=} 1 - h + h^2 + o(h^2) \underset{x\to 1}{=} 1 - (x-1) + (x-1)^2 + o((x-1)^2)$

f) $\sin(\ln(\cos x)) \underset{x\to 0}{=} \sin(\ln(1 - \frac{x^2}{2})) + o(x^3) \underset{x\to 0}{=} \sin(-\frac{x^2}{2}) + o(x^3) \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{2} + o(x^3)$

g) Plusieurs stratégies sont possibles pour le DL d'Arcsin : intégrer le DL de la dérivée (qu'on obtient avec un DL de référence), utiliser Arcsin $\circ$ sin = Id puis composer les DL pour en déduire celui d'Arcsin et, bien entendu, la formule de Taylor-Young. On trouve $\mathrm{Arcsin}(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

h)
$$\begin{aligned}
\sqrt{\cos(x)} &\underset{x\to 0}{=} (1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24})^{\frac{1}{2}} + o(x^5) \underset{x\to 0}{=} (1 + (-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}))^{\frac{1}{2}} + o(x^5) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}) - \frac{1}{8}(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24})^2 + o(x^5) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{96} + o(x^5)
\end{aligned}$$

i)
$$\begin{aligned}
\ln(1 + \sin(x) - x^2) &\underset{x\to 0}{=} \ln(1 + (x - x^2 - \frac{x^3}{6})) + o(x^3) \\
&\underset{x\to 0}{=} (x - x^2 - \frac{x^3}{6}) - \frac{1}{2}(x - x^2 - \frac{x^3}{6})^2 + \frac{1}{3}(x - x^2 - \frac{x^3}{6})^3 + o(x^3) \\
&\underset{x\to 0}{=} x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{6}x^3 + o(x^3)
\end{aligned}$$

j) $\frac{x}{1+e^x} \underset{x\to 0}{=} \frac{x}{2+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)} \underset{x\to 0}{=} \frac{x}{2}\times\frac{1}{1+(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12})} + o(x^3) \underset{x\to 0}{=} \frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}+o(x^3)$

k) $\frac{x\cos x}{\sin x} \underset{x\to 0}{=} \frac{x(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3))}{x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)} \underset{x\to 0}{=} (1-\frac{x^2}{2})\times\frac{1}{1-\frac{x^2}{6}} + o(x^3) \underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x^2}{3}+o(x^3)$

l) $\frac{\sqrt[3]{\cos x}}{2+x^2} = \frac{(1-\frac{x^2}{2})^{\frac{1}{3}}}{2(1+\frac{x^2}{2})} + o(x^3) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}-\frac{x^2}{3}+o(x^2).$

m) $\frac{x}{1+\sin x} \underset{x\to 0}{=} x-x^2+o(x^2)$

n) $\frac{\sin(x)-1}{\cos(x)+1} \underset{x\to 0}{=} (-1+x-\frac{x^3}{6})\times\frac{1}{2(1-\frac{x^2}{4})} + o(x^3) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}(-1+x-\frac{x^3}{6})(1+\frac{x^2}{4})+o(x^3)$

$\underset{x\to 0}{=} -\frac{1}{2}+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{24}+o(x^3)$

Exercice n° 6

On a, pour tout $x>0$:

$$\sqrt{x^2+x}-\sqrt[3]{x^3+x^2} = x\left((1+\frac{1}{x})^{\frac{1}{2}}-(1+\frac{1}{x})^{\frac{1}{3}}\right) \underset{x\to+\infty}{=} x\left(\frac{1}{2x}-\frac{1}{3x}+o(\frac{1}{x})\right) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{6}+o(1)$$

On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x}-\sqrt[3]{x^3+x^2} = \frac{1}{6}$.

Exercice n° 7

Pour trouver un équivalent en 0 de $x\longmapsto \ln\left(\frac{1-x^2}{1-\mathrm{sh}^2 x}\right)$ on en fait un DL. La subtilité, ici, est que le premier monôme non nul de la partie régulière est de degré 4. On trouve : $\ln\left(\frac{1-x^2}{1-\mathrm{sh}^2 x}\right) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{3}x^4$.

Exercice n° 8

1. f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=e^x+1>0$ donc f est strictement croissante et elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ (les limites de f s'obtiennent sans difficulté par opérations).
   Comme f' ne s'annule pas, on en déduit que la bijection réciproque f^{-1} est aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. En vertu de la formule de Taylor-Young, f^{-1} admet un $DL_2(0)$.
3. Soit $a_0+a_1x+a_2x^2$ la partie régulière du $DL_2(0)$ de f^{-1}. On a : $\forall x\in\mathbb{R},\ f^{-1}\circ f(x)=x$ et donc, en particulier $f^{-1}\circ f(x) \underset{x\to 0}{=} x$. Or, $f(x) \underset{x\to 0}{2} x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$ et comme $f(x) \underset{x\to 0}{\to} 0$ on peut composer les DL. Il vient :

$$x \underset{x\to 0}{=} a_0+a_1(2x+\frac{x^2}{2})+a_2(2x+\frac{x^2}{2})^2+o(x^2) \implies x=a_0+2a_1x+x^2(\frac{a_1}{2}+4a_2)$$

   On identifie les coefficients et il vient $a_0=0,\ a_1=\frac{1}{2}$ et $a_2=-\frac{1}{16}$.
   Finalement, $f^{-1}(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x}{2}-\frac{x^2}{16}+o(x^2)$.

Remarque : on pouvait aussi composer dans l'autre sens.

Exercice n° 9

On considère la fonction $f(x)=\dfrac{\sin^2 x}{x\ln(1+x)}$.

1. f n'est pas définie en 0 mais est clairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1;0[$ et sur $]0;+\infty$. Reste à étudier le recollement en 0, ce que l'on fait à l'aide d'un DL.
   $f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{(x-\frac{x^3}{6})^2+o(x^8)}{x}\times\frac{1}{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)} \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2+o(x^3)}{x^2(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2))} \underset{x\to 0}{=} \frac{1+o(x)}{1-\frac{x}{2}+o(x)} \underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x}{2}+o(x)$
   f admet donc un $DL_1(0)$ elle peut donc être prolongée en une fonction dérivable sur $]-1;+\infty[$.

2. Le DL donné précédemment permet de lire l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 : $y = 1 + \frac{x}{2}$. En revance, pour préciser les positions relatives des deux courbes, on a besoin d'un ordre supérieur. On reprend le calcul :
$f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)}{x^2(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2))} \underset{x\to 0}{=} \frac{1-\frac{x^2}{3}+o(x^2)}{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)} \underset{x\to 0}{=} (1-\frac{x^2}{3})(1+(\frac{x}{2}-\frac{x^2}{3})+(\frac{x}{2}-\frac{x^2}{3})^2)+o(x^2)$

$\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{5}{12}x^2 + o(x^2)$

Comme $-\frac{5}{12}x^2 + o(x^2) \leq 0$ au voisinage de 0, on en déduit que la courbe est au-dessous de sa tangente au point d'abscisse 0.

Exercice n° 10

La fonction $x \mapsto \frac{x^2\mathrm{Arctan}(x)}{x+1}$ n'est pas définie pour $x = -1$ et les limites en $-1^{\pm}$ sont infinies. On en déduit que la droite verticale d'équation réduite $x = -1$ est asymptote à la courbe d'équation $y = \dfrac{x^2\mathrm{Arctan}(x)}{x+1}$.
Cherchons à présent des asymptotes en $\pm\infty$:

— En $+\infty$: en posant, pour $x > 0$, $x = \frac{1}{h}$ on a $\frac{x^2\mathrm{Arctan}(x)}{x+1} = \frac{\mathrm{Arctan}(\frac{1}{h})}{h^2(1+\frac{1}{h})} = \frac{\mathrm{Arctan}(\frac{1}{h})}{h(1+h)}$

Or, pour $h > 0$ on a $\mathrm{Arctan}(h) + \mathrm{Arctan}(\frac{1}{h}) = \frac{\pi}{2}$ il suit :

$$\frac{\mathrm{Arctan}(\frac{1}{h})}{h(1+h)} = \frac{\frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}(h)}{h(1+h)} = \frac{1}{h}\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}(h)\right)\frac{1}{1+h}$$

On fait un DL pour $h \to 0$:

$$\frac{1}{h}\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}(h)\right)\frac{1}{1+h} \underset{h\to 0}{=} \frac{1}{h}(\frac{\pi}{2}-h+\frac{h^3}{6})(1-h+h^2-h^3)+o(h^2) \underset{h\to 0}{=} \frac{1}{h}\left(\frac{\pi}{2} - h(1+\frac{\pi}{2}\right)+o(h))$$

On repasse à $x = \frac{1}{h}$ et on a : $\frac{x^2\mathrm{Arctan}(x)}{x+1} \underset{x\to+\infty}{=} -1 - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}x + o(1)$.

On en conclut que $y = -1 - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}x$ est asymptote à $y = \frac{x^2\mathrm{Arctan}(x)}{x+1}$ en $+\infty$.

— En $-\infty$, on procède de façon similaire et, en gardant en mémoire que pour $h > 0$ on a $\mathrm{Arctan}(h) + \mathrm{Arctan}(\frac{1}{h}) = -\frac{\pi}{2}$ on obtient que $y = -\frac{\pi}{2}x - 1 + \frac{\pi}{2}$ est asymptote à la courbe.

Remarque : : pour avoir les positions relatives de la courbe et ses asymptotes, il aurait fallu...

3 Démontrer les résultats du cours et exercices théoriques

Exercice n° 11

1. Soit $0 \leq p < n$ et une fonction f qui admette un $DL_n(a)$.
Il existe des réels $b_0, \dots b_n$ tels que $f(a+h) \underset{h\to 0}{=} b_0 + b_1 h + \cdots + b_p h^p + \dots b_n h^n + o(h^n)$.
En remarquant que, pour tout $k \in [\![p+1; n]\!]$ on a $h^k \underset{h\to 0}{=} o(h^p)$ et qu'une fonction négligeable devant h^n l'est devant h^p lorsque $h \to 0$ on a : $f(a+h) \underset{h\to 0}{=} b_0 + b_1 h + \dots b_p h^p + o(h^p)$ et donc f admet un $DL_p(a)$.
2. Soit n un entier naturel et une fonction paire f qui admette un $DL_n(0)$.
Il existe des réels $a_0, \dots a_n$ tels que $f(h) \underset{h\to 0}{=} a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + o(h^n)$.
Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un entier impair $2k+1k \leq n$ tel que $a_{2k+1} \neq 0$, on peut aussi supposer que $2k+1$ est le plus petit des entiers qui vérifie cela. On a donc :

$$\begin{aligned} f(h) &\underset{h\to 0}{=} a_0 + a_2 h^2 + \cdots + a_{2k} h^{2k} + a_{2k+1} h^{2k+1} + \cdots + a_n h^n + o(h^n) \\ &\underset{h\to 0}{=} a_0 + a_2 h^2 + \cdots + a_{2k} h^{2k} + a_{2k+1} h^{2k+1} + o(h^{2k+1}) \end{aligned}$$

et donc $f(h)-(a_0+a_2h^2+\cdots+a_{2k}h^{2k}) \underset{h\to 0}{=} a_{2k+1}h^{2k+1}+o(h^{2k+1})$. L'expression à gauche étant une fonction paire et continue (puisqu'elle admet un DL) de h, son signe à gauche et à droite de 0 est le même. Or, l'expression à droite est impaire et son signe change en 0. On a donc une absurdité.

Finalement, si f est paire et admet un $DL_n(0)$ alors, la partie régulière de ce développement limité ne comporte que des monômes de degrés pairs.

3. La réciproque est fausse. La fonction $f(x)=1+x^2+x^3$ vérifie $f(x) \underset{x\to 0}{=} 1+x^2+o(x^2)$ mais elle n'est pas paire.

Exercice n° 12

1. Soit g est dérivable en 0 telle que $g'(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^n)$. g étant dérivable au voisinage de 0, on peut appliquer le TAF : pour x voisin de 0, il existe c entre 0 et x tel que $g'(c)=\frac{g(x)-g(0)}{x}$ ce qui est équivalent à $g(x)=g(0)+xg'(c)$. Or, $g'(c) \underset{x\to 0}{=} x^n$ par hypothèses, donc $g(x) \underset{x\to 0}{=} g(0)+o(x^{n+1})$.

2. Soit $g(x)=f(x)-\left(g(0)+\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{k+1}x^{k+1}\right)$.
La fonction $g(x)$ vérifie les conditions de la question précédente et cela donne le résultat voulu.

Exercice n° 13

Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ telle que

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ donc, pour x assez grand, $f(x)>0$ et on peut diviser par $f(x)$.
On a alors :

$$\frac{\mathrm{e}^{f(x}}{\mathrm{e}^{g(x)}}=\mathrm{e}^{f(x)-g(x)}=\mathrm{e}^{f(x)(\frac{f(x)}{g(x)}-1)}$$

Or $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $\dfrac{\mathrm{e}^{f(x}}{\mathrm{e}^{g(x)}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Finalement, $\mathrm{e}^{g(x)} \underset{x\to+\infty}{=} o(\mathrm{e}^{f(x)})$.

b) La réciproque est fausse : avec $f(x)=2x$ et $g(x)=x$ on a $\mathrm{e}^{g(x)} \underset{x\to+\infty}{=} o(\mathrm{e}^{f(x)})$ mais $g(x)$ n'est pas négligeable devant $f(x)$ en $+\infty$.

4 Plus difficile...

Exercice n° 14

1. $f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{+*},\mathbb{R})$ et $\forall x\in]0;1],\ f'(x)=1-\frac{1}{x}\leq 0$ avec $f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$.
On en déduit que f est strictement décroissante sur $]0;1]$ et réalise une bijection de $]0;1]$ sur $f(]0;1])=[f(1);\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)[=[1;+\infty[$ (puisque f est continue).
On en déduit que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, il existe un unique antécédent à n par f dans $]0;1]$, on le nomme u_n.

2. $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ f(\mathrm{e}^{-n})=\mathrm{e}^{-n}+n<n+1=f(u_{n+1})$.
La fonction f étant strictement décroissante sur $]0;1]$ on a $u_{n+1}<\mathrm{e}^{-n}$, on en déduit que $u_n\to 0$.

3. $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n-\ln(u_n)=n \iff \mathrm{e}^{u_n-\ln(u_n)}=\mathrm{e}^n \iff \mathrm{e}^{u_n}=u_n\mathrm{e}^n$.
Or, $u_n\to 0$ donc $u_n\mathrm{e}^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\mathrm{e}^n}$.

Exercice n° 15

On a : $\forall n \geq 3, \quad \dfrac{\sum_{k=1}^{n} k}{n!} \;=\; 1 \;+\; \dfrac{1}{n} \;+\; \dfrac{\sum_{k=1}^{n-2} k!}{n!}$. Or,

$$\frac{1}{n} \longrightarrow 0 \qquad \text{et} \qquad 0 \;\leq\; \frac{\sum_{k=1}^{n-2} k!}{n!} \;\leq\; \underbrace{\sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{(n-2)^2}}_{=\frac{1}{n-2}\longrightarrow 0}$$

On en déduit que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k! \sim n!$