Chap 15 - Dénombrement et probas - Exercices

Exercice n° 1

VRAI ou FAUX sur l'ensemble du chapitre.
n désigne un entier naturel non nul ; $(\Omega, \mathbb{P})$ désigne un univers fini probabilisé, A, B et C des événements.

a) S'il existe une bijection entre les ensembles A et B et si $A \subset B$ alors $A = B$.
b) Soit A un ensemble de cardinal n et $\varphi : A \to A$ est une injection. Alors φ est une bijection.
c) Soit A est un ensemble de cardinal n et $\varphi : A \to A$ est une surjection. Alors φ est une bijection.
d) Il existe un ensemble ayant exactement n parties.
e) Dans le triangle de Pascal, la somme des coefficients des lignes double à chaque ligne.
f) Lorsqu'on joue à pile ou face, la probabilité d'obtenir pile est 0,5.
g) Si A et $\overline{A}$ sont indépendants alors $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$.
h) Deux événements incompatibles sont indépendants.
i) Deux événements indépendants sont incompatibles.
j) Si $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$ alors A, B et C sont mutuellement indépendants.

1 Applications directes du cours

Exercice n° 2

1. Dans la classe de PCSI, on note le nom du premier élève à arriver dans la classe le matin. Combien y a-t-il de résultats possibles ?
2. Dans la classe de PCSI, cinq matins de suite, on note le nom du premier élève à arriver dans la classe. Combien y a-t-il de résultats possibles ?
3. Dans la classe de PCSI on note par ordre d'arrivée les noms des cinq premiers élèves à arriver dans la classe le matin. Combien y a-t-il de résultats possibles ?
4. Dans la classe de PCSI dont on a une liste des élèves, on surligne les noms des cinq premiers élèves à arriver dans la classe le matin. Combien y a-t-il de résultats possibles ?

Exercice n° 3

Pour les expériences aléatoires suivantes, précisez l'univers ainsi que son cardinal.

1. On lance un dé 15 fois de suite.
2. On tire une main de deux cartes dans un jeu de 32 cartes.
3. On lance une pièce de monnaie jusqu'à obtenir Pile et on note le nombre de lancés.

Exercice n° 4

On tire deux cartes au hasard dans un jeu de 32 cartes.
Calculer les probabilités des événements $A =$"Les deux cartes sont des coeurs", $B =$"On a une paire d'as", $C =$"On a une paire" et $D =$"Au moins une des cartes est un as".

Exercice n° 5

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ désigne un univers fini probabilisé, A et B des événements avec $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{3}$.

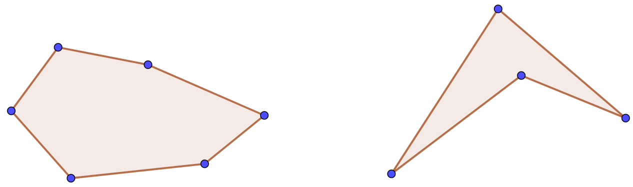
1. Donner des encadrements pour $\mathbb{P}(A \cap B)$ et $\mathbb{P}(A \cup B)$.
2. Calculer $\mathbb{P}(A \cup B)$ dans les situations suivantes :

A et B sont incompatibles ; $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}$; A et B sont indépendants.

2 Un peu plus dur

Exercice nº 6

Un polygône est dit *convexe* lorsque, pour tout couple de points A et B pris sur les bords du polygône, le segment $[AB]$ est inclus dans le polygône. Ci-dessous, un polygône convexe et un polygône non-convexe :



Existe-t-il des polygônes convexes possédant autant de *diagonales* que de sommets ?

Exercice nº 7

Un glacier propose six parfums de glace. On peut acheter des cornets à une, deux ou trois boules. Combien de cornets différents est-il possible de composer ?

Exercice nº 8

1. Combien existe-t-il de parties de $[\![1;23]\!]$ qui contiennent exactement un élément de $[\![1;6]\!]$? Même question avec « au moins un élément ».
2. Reprendre la question précédente avec n et p à la place de 23 et 6.

Exercice nº 9

Soit E un ensemble fini de cardinal $n > 0$. Montrer que le nombre de triplets de parties (A, B, C) de E qui vérifient $A \cup B \cup C = E$ est 7^n.

Exercice nº 10

Soit E un ensemble fini. Combien y a-t-il de couples de parties (A, B) de E qui vérifient $A \subset B$?

Exercice nº 11

1. Soit n, m, p des entiers naturels tels que $p \leq \min(n, m)$. Démontrer la formule de Vandermonde :

$$\binom{n+m}{p} = \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k}$$

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\displaystyle\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Exercice nº 12

Un laboratoire propose un test de dépistage de la maladie de la vache folle. La notice précise la qualité du test : Lorsque le test est appliqué sur une vache malade, le test est positif dans 99.8 % des cas. Lorsque le test est appliqué sur une vache saine, le test est négatif dans 99.6 % des cas. On sait d'autre part qu'il y a une vache malade sur 100 000. Peut–on avoir confiance dans ce test ? Pour cela, on cherche la réponse à la question : si le test est positif, quelle est la probabilité que la vache soit malade ?

Exercice n° 13

On lance simultanément un dé rouge et un dé bleu et on note

— A : "la somme vaut 6"

— B : "le résultat du dé rouge est pair"

A et B sont-ils indépendants ?

Exercice n° 14

Pierre et Claude jouent au tennis. Les deux joueurs ont la même chance de gagner le premier point. Par la suite, lorsque Pierre gagne un point, la probabilité qu'il gagne le point suivant est $0,7$. Par contre, s'il perd un point, la probabilité qu'il perde le point suivant est de $0,8$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les évènements :

— G_n : « Pierre gagne le $n^{\text{ième}}$ point ».

— P_n : « Pierre perd le $n^{\text{ième}}$ point ».

On pose : $p_n = \mathbb{P}(G_n)$.

1. Déterminer p_1 puis p_2.
2. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,2$.
3. On pose, pour tout entier naturel n non nul, $v_n = p_n - \dfrac{2}{5}$.
   (a) Prouver que la suite (v_n) est une suite géométrique.
   (b) En déduire l'expression de p_n en fonction de n.
   (c) Déterminer la limite de la suite (p_n) quand n tend vers $+\infty$.

Exercice n° 15

On a observé statistiquement que s'il fait beau un jour, la probabilité qu'il fasse beau le lendemain est de 0.7 et que s'il ne fait pas beau un jour la probabilité qu'il fasse beau le lendemain est de 0.4.

a) Il fait beau mercredi. Quelle est la probabilité qu'il fasse beau le vendredi ?

b) Quelle est la probabilité qu'il fasse beau vendredi s'il n'a pas fait beau mercredi ?

3 Démontrer les résultats du cours et exercices théoriques

Exercice n° 16

Soit A et B deux ensembles finis. Dénombrer les applications de A dans B.

Exercice n° 17

Après avoir rappelé la formule du binôme de Newton, la démontrer en faisant un dénombrement.

Exercice n° 18

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un univers fini, probabilisé.

Démontrer que, s'il y a équiprobabilité sur Ω alors pour tout événement A on a $\mathbb{P}(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|}$.

4 Plus difficile...

Exercice n° 19

On lance un dé jusqu'à obtenir 6. Le résultat de l'expérience est la moyenne des résultats obtenus avant le 6. Quel est l'ensemble des résultats possibles ?

Exercice n° 20

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On veut compter le nombre de façons différentes de monter un escalier de n marches si on peut faire des pas de 1 ou de 2 marches ; on appelle ce nombre X_n.

1. Déterminer X_i pour $i \in [\![1;4]\!]$.
2. Soit $n \geq 3$, trouver une relation de récurrence entre $X_n,\ X_{n-1}$ et X_{n-2}.
3. Quelle valeur donner X_0 pour que la relation trouvée à la question précédente demeure vraie au rang $n = 2$?
4. Pour $n \geq 0$, exprimer X_n en fonction de n.

Exercice n° 21

Problème de Monty-Hall ou énigme des trois portes

Dans un jeu télévisé, un candidat est face à trois portes. Derrière l'une des portes se trouve une voiture alors que derrière les deux autres se trouvent des chèvres. Le candidat ignore ce qui est derrière chaque porte alors que l'animateur le sait. Le jeu se déroule de la façon suivante :

1. Le candidat montre une porte mais ne l'ouvre pas.
2. L'animateur ouvre alors une des deux autres portes et dévoile une chèvre.
3. Le candidat doit alors ouvrir la porte de son choix parmi les deux restantes, il gagne ce qui est caché derrière.

Le candidat a-t-il intérêt à ouvrir la porte qu'il avait montré au départ, ou bien l'autre, ou alors aucun des deux choix n'est favorable ?