Correction des exercices du chapitre 15

Exercice n° 1

VRAI ou FAUX sur l'ensemble du chapitre.
n désigne un entier naturel non nul ; $(\Omega, \mathbb{P})$ désigne un univers fini probabilisé, A, B et C des événements.

a) Faux. Par exemple, tan réalise une bijection de $=]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}$ vers $B=\mathbb{R}$. On a $A\subset B$ mais $A\neq B$. En revanche, le résultat est vrai si on rajoute la condition que les ensembles sont finis (il suffit de le demander pour un des ensembles).

b) Vrai. Soit $\varphi : A \to A$ une injection. Alors $|\varphi(A)| = |A|$ ce qui prouve que φ est une surjective et donc bijective.

c) Vrai. Soit $\varphi : A \to A$ une surjection. Raisonnons par l'absurde en supposant que φ n'est pas injective. Il existe alors $x \neq y$ dans A tels que $\varphi(x) = \varphi(y)$. On a donc $\varphi(A\backslash\{x\}) = \varphi(A) = A$ ce qui est absurde car $|\varphi(A\backslash\{x\})| \leq |A| - 1$. Finalement φ est injective et donc bijective.

d) Faux. Un ensemble à n éléments a exactement 2^n parties. Il n'existe donc pas d'ensemble ayant exactement 3 parties.

e) Vrai. C'est une conséquence de la formule de Pascal qui permet de construire le triangle : chaque coefficient de la ligne n est utilisé dans deux sommes pour construire la ligne $n+1$.

f) Faux. Si on joue à pile ou face avec une pièce truquée qui tombe toujours sur pile, la probabilité d'obtenir pile est 1.

g) Vrai. Si A et $\overline{A}$ sont indépendants alors $\mathbb{P}(A\cap\overline{A}) = \mathbb{P}(A)P(\overline{A})$. Or, $A\cap\overline{A} = \emptyset$ et $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1-\mathbb{P}(A)$ donc $0 = \mathbb{P}(A)(1-\mathbb{P}(A))$ ce qui est équivalent à $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$.

h) Faux. On joue à pile ou face avec une pièce équilibrée. Les événements « obtenir pile » et« obtenir face » sont incompatibles mais pas indépendants.

i) Faux. On lance deux fois de suite une pièce équilibrée. Les événements « obtenir pile au premier lancé » et« obtenir pile au secon lancé » sont indépendants mais pas incompatibles.

j) Faux. On joue à pile ou face avec une pièce équilibrée. Soit $A =$« obtenir pile », $B = A$ et $C = \emptyset$. On a $\mathbb{P}(A\cap B\cap C) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0 = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$ mais, clairement, A et B ne sont pas indépendants donc A, B et C ne sont pas mutuellement indépendants.

1 Applications directes du cours

Exercice n° 2

Soit $n = |PCSI|$, c'est-à-dire le nombre d'élèves de la classe.

1. Il y a n possibilités pour le premier élève à arriver dans la classe le matin. *(C'est théorique, on sait tous très bien que tout le monde ne peut pas arriver en avance. Déjà à l'heure...)*
2. Pour chaque matin, il y a n possiblités. Si on note 5 matins de suite, on obtient une 5-liste de ces n possibilités : il y a n^5 résultats possibles.
3. Pour le premier élève arrivé, il y a n possibilités, pour le suivant $n-1$ et ainsi de suite jusqu'au 5è pour lequel il y a $n-4$ possibilités. Il y a donc $n\times(n-1)\times\cdots\times(n-4) = \frac{n!}{(n-5)!}$ possibilités. On vient de compter les arrangements de 5 élèves parmi n.
4. La liste avec les noms surlignés ne permet pas de savoir l'ordre d'arrivée. Autrement dit : étant donné les cinq premiers élèves arrivés, on aura la même liste surlignée quelque soit leur ordre d'arrivée. Etant donné 5 élèves, il y a 5! ordre possible et donc il y a 5! fois plus de classements par ordre d'arrivée que de listes surlignées. On en déduit qu'il y a $\frac{n!}{5!(n-5)!}$ listes surlignées possibles. On vient de compter les combinaisons de 5 élèves parmi n.

Remarque : dans les deux derniers cas, si on comprend tout de suite ce qu'on est en train de dénombrer (un arrangement ? une combinaison ?) on peut utiliser directement la formule du cours.

Exercice n° 3

1. On lance un dé 15 fois de suite : l'univers est $\Omega = [\![1;6]\!]^{15}$ et son cardinal est $|\Omega| = 6^{15}$.
2. On tire une main de deux cartes dans un jeu de 32 cartes, l'univers est l'ensemble des résultats possibles, c'est-à-dire l'ensemble des mains de deux cartes. Une main de deux carte correspond à une combinaison de deux cartes parmi les 32 du jeu, il y en a $\binom{32}{2} = 32 \times 15$.
3. On lance une pièce de monnaie jusqu'à obtenir Pile et on note le nombre de lancés. L'univers est l'ensemble $\mathbb{N}\backslash\{0\}$, son cardinal est infini.

Exercice n° 4

Puisque'on tire les cartes au hasard, on a équiprobabilité sur l'univers Ω dont le cardinal est $\binom{32}{2}$. Pour chaque évenement E on a $\mathbb{P}(E) = \frac{|E|}{|\Omega|}$ et il nous faut donc dénombrer les évenements A, B, C et D.

- Choisir deux cœurs c'est choisir deux cartes parmi 8 et donc $|A| = \binom{8}{2}$ puis $\mathbb{P}(A) = \frac{\frac{8\times 7}{2}}{\frac{32\times 31}{2}} = \frac{7}{124}$.
- B ="On a une paire d'as" a pour cardinal $\binom{4}{2}$ et donc $\mathbb{P}(B) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{32}{2}} = \frac{7}{248}$.
- C ="On a une paire" a pour cardinal $\underbrace{\binom{8}{1}}_{\text{force de la paire}} \times \underbrace{\binom{4}{1}}_{\text{couleurs des cartes}} = 32$ et donc $\mathbb{P}(C) = \frac{32}{\binom{32}{2}} = \frac{2}{31}$.
- D ="Au moins une des cartes est un as" a pour événement complémentaire $\overline{D}$ ="Aucune carte n'est un as". On a :

$$\mathbb{P}(\overline{D}) = \frac{\binom{28}{2}}{\binom{32}{2}} \iff \mathbb{P}(D) = 1 - \frac{\binom{28}{2}}{\binom{32}{2}}$$

Exercice n° 5

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ désigne un univers fini probabilisé, A et B des événements avec $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{3}$.

1. On a : $A, B \ \subset \ A \cup B \ \subset \ \Omega$, ce qui implique :

$$\max(\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)) \leq \mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(\Omega) \iff \frac{1}{2} \leq \mathbb{P}(A \cup B) \leq 1$$

Ce premier encadrement peut être amélioré en utilisant la relation :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \iff \mathbb{P}(A \cup B) = \frac{5}{6} - \mathbb{P}(A \cap B)$$

$P(A \cap B)$ est minimal et vaut 0 si $A \cap B = \emptyset$ ce qui est possible ici car $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) \leq 1$ (par exemple avec un lancé de dé équilibré : A ='obtenir un nombre pair', B ='obtenir 3 ou 5'), il suit que $\mathbb{P}(A \cup B) \leq \dfrac{5}{6}$ (et comme le cas d'égalité est atteint par l'exemple donné, c'est la meilleur majoration possible).
$P(A \cap B)$ est maximal lorsque $A \subset B$ ou $B \subset A$. Ici, le cas $A \subset B$ est impossible car $\mathbb{P}(A) > \mathbb{P}(B)$, le cas $B \subset A$ est possible (par exemple avec un lancé de dé équilibré en considérant A ='obtenir un nombre pair', B ='obtenir 2 ou 4'). On a alors $P(A \cap B) = \mathbb{P}(B) = \frac{1}{3}$. Il suit que $\mathbb{P}(A \cup B) \geq \dfrac{5}{6} - \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \mathbb{P}(A \cup B) \geq \dfrac{1}{2}$. (Ici aussi, pour les mêmes raisons que précédemment, c'est la meilleure minoration possible).
Finalement, le meilleur encadrement possible est $\dfrac{1}{2} \leq \mathbb{P}(A \cup B) \leq \dfrac{5}{6}$

2. — A et B sont incompatibles signifie que $A \cap B = \emptyset$ on a alors $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$ et $\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{5}{6}$.
   — Si $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}$ alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{5}{6} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$.
   — A et B sont indépendants signifie que $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ c'est-à-dire $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{6}$. On a alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{2}{3}$.

2 Un peu plus dur

Exercice n° 6

Soit $n \geq 4$ le nombre de sommets d'un polygone convexe. Une diagonale relie un sommet à l'un des $n-3$ sommets qui ne lui sont pas égaux ou limitrophe ; il y a donc $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonales.
Le polygone a autant de sommets que de diagonales si, et seulement si, $n = \frac{n(n-3)}{2} \Leftrightarrow, \in \{0; 5\}$.
Finalement, les pentagones sont les seuls polygones à avoir autant de diagonales que de sommets.

Exercice n° 7

Dénombrons les cornets en fonction du nombre de boules de glace :
— Il y a $\binom{6}{1}$ cornets à une boule.
— Les cornets à deux boules sont de deux sortes : deux boules du même parfum ou bien de deux parfums différents. Il y a donc $\binom{6}{1} + \binom{6}{2}$ cornets à deux boules.
— En raisonnant de façon analogue, il y a $\binom{6}{1} + \binom{6}{3} + \binom{6}{1}\binom{5}{1}$ cornets à trois boules.
Au final, en ajoutant tous les cas, il y a 83 cornets possibles.

Exercice n° 8

1. Une partie de $[\![1; 23]\!]$ qui contient exactement un élément de $[\![1; 6]\!]$ est de la forme $X \sqcup \{y\}$ avec $X \in \mathcal{P}([\![7; 23]\!]$ et $y \in [\![1; 6]\!]$.
   Il y a donc $2^{23-6} \times 6$ parties de $[\![1; 23]\!]$ qui contiennent exactement un élément de $[\![1; 6]\!]$.

   Soit N, le nombre de parties de $[\![1; 23]\!]$ qui contiennent au moins un élément de $[\![1; 6]\!]$. N est donc le nombre de parties de $[\![1; 23]\!]$ auquel on soustrait le nombre de parties de $[\![1; 23]\!]$ qui ne contiennent aucun un élément de $[\![1; 6]\!]$.
   On a donc $N = 2^{23} - 2^{23-6}$.
2. Les nombres cherchés sont $p2^{n-p}$ et $2^n - 2^{n-p}$.

Exercice n° 9

On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
Pour $n = 1$, soit x l'unique élément de E. On a $E = \{x\}$ et les parties de E sont E et $\emptyset$. Il y a $2^3 = 8$ triplets de parties de E et un seul n'est pas un recouvrement de E (le triplet $(\emptyset; \emptyset; \emptyset)$).
Supposons que la propriété soit vraie pour les ensembles à n éléments, supposons que E en comporte $n+1$ et soit $x \in E$. On a $E = \{x\} \sqcup \widehat{E}$ avec $|\widehat{E}| = n$.
Pour construire un triplet de parties de E qui recouvre E il faut avoir un triplet de parties de $\widehat{E}$ qui recourvre $\widehat{E}$ (il y en a 7^n d'après l'HDR) et rajouter x à au moins une des trois parties. Il y a 7 façons de rajouter x (aux trois parties, à deux parties ou à une seule) on a donc $7 \times 7^n = 7^{n+1}$ triplets de parties de E qui recouvrent E.
La propriété a été initialisée pour $n = 1$, elle est héréditaire donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Soit E un ensemble fini de cardinal $n > 0$. Montrer que le nombre de triplets de parties (A, B, C) de E qui vérifient $A \cup B \cup C = E$ est 7^n.

Exercice n° 10

Soit E un ensemble fini, notons $n = |E|$. Pour tout $k \in [\![0;n]\!]$ on a $\binom{n}{k}$ parties B de E à k éléments. Chacune de ces parties à 2^k parties A. Il y a donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = 3^n$ couples de parties (A, B) de E qui vérifient $A \subset B$?

Exercice n° 11

1. Soit n, m, p des entiers naturels tels que $p \leq \min(n, m)$.
   On considère A et B des ensembles disjoints à n et m éléments respectivement.
   Il y a $\binom{n+m}{p}$ parties de $A \sqcup B$ à p éléments. Pour construire une telle partie, il faut choisir le nombre $k \in [\![0;p]\!]$ d'élements de A puis les k éléments de A en question et les compléter par $p-k$ éléments de B. Au final, on a $\displaystyle\binom{n+m}{p} = \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k}$.
2. En prenant $n = m$ dans la formule précédente, on obtient le résultat souhaité.

Exercice n° 12

Soit les événements M : la vache est malade et T : le test est positif. L'énoncé donne :

$$\mathbb{P}(M) = 10^{-5} \quad ; \quad \mathbb{P}_M(T) = 0,998 \quad ; \quad \mathbb{P}_{\overline{M}}(\overline{T}) = 0,996$$

On en déduit par passage au complémentaire : $\mathbb{P}(\overline{M}) = 1 - 10^{-5}$, $\mathbb{P}_M(\overline{T}) = 0,002$ et $\mathbb{P}_{\overline{M}}(T) = 0,004$.
Retrouvons la relation de Bayes pour établir $\mathbb{P}_T(M)$:

$$\mathbb{P}_T(M) \underset{\text{déf}}{=} \frac{\mathbb{P}(M \cap T)}{\mathbb{P}(T)} \underset{\substack{\text{probas}\\\text{totales}}}{=} \frac{\mathbb{P}(M \cap T)}{\mathbb{P}(T \cap M) + \mathbb{P}(T \cap \overline{M})} \underset{\substack{\text{probas}\\\text{composées}}}{=} \frac{\mathbb{P}(M)\mathbb{P}_M(T)}{\mathbb{P}(M)\mathbb{P}_M(T) + \mathbb{P}(\overline{M})\mathbb{P}_M(T)}$$

Après calculs, on trouve $\mathbb{P}_T(M) \simeq \frac{1}{400}$ on en conclut que le test est mauvais.

Exercice n° 13

L'univers est $\Omega = [\![1;6]\!]^2$.
L'énoncé ne donne pas d'information pour savoir si les dés sont équilibrés (auquel cas on a équiprobabilité) ou non.

— Si on a équiprobabilité, on a :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{5}{36} \quad ; \quad \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2} \quad ; \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{2}{36}$$

  On a $\mathbb{P}(A \cap B) \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ et les événements ne sont pas indépendants.

— Si les dés sont truqués on peut avoir des situations dans lesquelles A et B sont indépendants. Par exemple, si le dé ble donne 6 à tous les coups on a $\mathbb{P}(A) = 0$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = 0 = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ et donc A et B sont indépendants.

Exercice n° 14

1. D'après l'énoncé, on a $p_1 = \frac{1}{2}$. En utilisant les probabilités totales et les probabilités composées (un arbre est conseillé) on a :

$$p_2 = \mathbb{P}(G_1)\mathbb{P}_{G_1}(G_2) + \mathbb{P}(\overline{G_1})\mathbb{P}_{\overline{G_1}}(G_2) = 0,45$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On procède de la même façon que pour la question précédente :

$$p_{n+1} = \mathbb{P}(G_{n+1}) = \mathbb{P}(G_{n+1} \cap G_n) + \mathbb{P}(G_{n+1} \cap \overline{G_n}) = 0,7p_n + 0,2(1 - p_n) = 0,5p_n + 0,2$$

3. On reconnait que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétco-géométrique. La fin de l'exercice vise à revoir comment s'étudie une telle suite : on se ramène à une suite géométrique en soustrayant le point fixe de la fonction affine, on aboutit à une formule explicite de la suite géométrique puis de la suite arithmétique.
   (a) On trouve que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
   (b) Il suit que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{1}{5}(\frac{1}{2})^n$ puis $p_n = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}(\frac{1}{2})^n$.
   (c) Comme $0 < \frac{1}{2} < 1$ on a $(\frac{1}{2})^n \to 0$ et donc $p_n \to \frac{2}{5}$.

Exercice n° 15

a) Soit les événements BJ : il fait beau jeudi ; BV : il fait beau vendredi. Les données de l'énoncé sont $\mathbb{P}(BJ) = 0,7$ (puisqu'il a fait beau mercredi), $\mathbb{P}_{BJ}(BV) = 0,7$ et $\mathbb{P}_{\overline{BJ}}(BV) = 0,4$. On en déduit les pobabilités des événements complémentaires (il est conseillé de faire un arbre) : $\mathbb{P}(\overline{BJ}) = 0,3$, $\mathbb{P}_{BJ}(\overline{BV}) = 0,3$ et $\mathbb{P}_{\overline{BJ}}(\overline{BV}) = 0,6$.
On a : $\mathbb{P}(BV) = \mathbb{P}(BJ)\mathbb{P}_{BJ}(BV) + \mathbb{P}(\overline{BJ})\mathbb{P}_{\overline{BJ}}(BV) = 0,7^2 + 0,3 \times 0,4 = 0,61$.

b) S'il n'a pas fait beau mercredi, seules les valeurs de $\mathbb{P}(BJ)$ et $\mathbb{P}(\overline{BJ})$ cahngent dans le calcul précédent. Au final, on obtient $P(BV) = 0,52$.

3 Démontrer les résultats du cours et exercices théoriques

Exercice n° 16

Soit A et B deux ensembles finis. Construire une application $A \to B$ c'est, pour chaque élément de A décider son image parmi les éléments de B. Pour chaque élément de A on a $|B|$ images possibles, on en déduit qu'il y a $|B|^{|A|}$ applications de A dans B.

Exercice n° 17

Soit a, b deux nombres complexes et n un entier naturel non nul. On a $(a+n)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.
Le développement du produit $(a+b)^n = (a+b)(a+b) \times \cdots \times (a+b)$ génère des termes de la forme $a^x b^y$. x et y sont des entiers naturels tels que $x + y = n$ et donc, en posant $x = k$, on a $y = n - k$.
Pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, on génère $a^k b^{n-k}$ en choisissant le terme a dans k facteurs $(a+b)$ sur les n que comporte le produit : il y a donc $\binom{n}{k}$ façons de créer un tel terme.
En sommant pour $k \in [\![0; n]\!]$, on obtient la formule du binôme de Newton.

Exercice n° 18

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un univers fini, probabilisé sur lequel il y a équiprobabilité. Cela signifie que toutes les issues de Ω on une probabilité qui vaut $p = \frac{1}{|\Omega|}$.
Soit A un événement, notons $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ avec les a_i qui sont les issues qui composent A.
On a :

$$\mathbb{P}(A) \;=\; \mathbb{P}(\{a_1\} \sqcup \{a_1\} \sqcup \cdots \sqcup \{a_n\}) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\{a_k\} \;=\; \sum_{k=1}^{n} p \;=\; np \;=\; \frac{|A|}{|\Omega|}$$

4 Plus difficile...

Exercice n° 19

Si on obtient 6 directement, il n'y a pas de résultat à l'expérience, on écarte donc ce cas.
L'univers Ω est l'ensemble des moyennes des résultats obtenus, c'est-à-dire une moyenne d'entiers de $[\![1; 5]\!]$. Clairement $\Omega \subset \ ([1; 5] \cap \mathbb{Q})$. Montrons que l'inclusion réciproque est également vraie.

Soit $\frac{p}{q}$ un rationnel de $[1;5]$, on a donc $q \leq p \leq 5q$. Prouvons que tous les rationnels de la forme $\frac{i}{q}$ avec $i \in [\![p;5p]\!]$ sont dans Ω. Supposons que le premier 6 apparaisse au $p+1-$è lancé.

- Si on n'obtient que des 1 aux p premiers lancés, on a comme résultat $\frac{p}{p} = 1$.
- Si on obtient 2 au premier lancé puis uniquement 1 ensuite, on a comme résultat $\frac{p+1}{p}$.
- Si on obtient 3 au premier lancé puis uniquement des 1 ensuite, on a comme résultat $\frac{p+2}{p}$.
- En incrémentant de la sorte, on obtient que tous nombres de la forme $\frac{i}{p}$ avec $i \in [\![p;5p]\!]$ sont des résultats possibles et, en particulier, $\frac{p}{q} \in \Omega$.

Finalement, $\Omega = \ ([1;5] \cap \mathbb{Q})$

Exercice n° 20

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On veut compter le nombre de façons différentes de monter un escalier de n marches si on peut faire des pas de 1 ou de 2 marches ; on appelle ce nombre X_n.

1. - Clairement, il n'y a qu'une façon de monter un escalier d'une marche : $\boxed{X_1 = 1}$.
   - Pour un escalier de deux marches, soit on monte en deux pas d'une marche, soit en un pas de deux marches : $\boxed{X_2 = 2}$.
   - Pour un escalier de trois marches, soit on monte en trois pas d'une marche, soit en un pas de deux marches puis un pas d'une marche ou encore un pas d'une marche suivi d'un pas de deux marches : $\boxed{X_3 = 3}$.
   - Pour un escalier de quatre marches, on peut faire quatre pas d'une marche, deux pas d'une marche et un pas de deux marches (il y a alors trois façons de procéder, suivant que le pas de deux marches soit le premier, le deuxième ou le troisième pas) ou enfin deux pas de deux marches. Au final $\boxed{X_4 = 5}$.
2. Soit $n \geq 3$. Pour monter un escalier de n marches, soit on commence par un pas d'une marche, soit par un pas de deux marches. Dans le premier cas, il reste $n-1$ marches à monter et il y a X_{n-1} façons de procéder ; dans le second cas il reste $n-2$ marches et donc X_{n-2} façons de procéder.
   Au final, on a : $\boxed{\forall n \geq 3,\ X_n = X_{n-1} + X_{n-2}}$.
3. La relation $X_n = X_{n-1} + X_{n-2}$ est vraie au rang $n = 2$ si, et seulement, si :
   $$X_2 = X_1 + X_0 \iff 2 = 1 + X_0 \iff \boxed{X_0 = 1}.$$
4. La suite $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite récurrente linéaire du second ordre, son polynôme caractéristique $R^2 - R - 1$ a pour racines $R_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $R_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Il suit qu'il existe des réels α et β tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $X_n = \alpha R_1^n + \beta R_2^n$.
   Pour $n = 0$, on obtient $1 = \alpha + \beta \iff \alpha = 1 - \beta\ $: (1).
   Pour $n = 1$, on obtient $1 = \alpha R_1 + \beta R_2 \iff 2 = \alpha(1+\sqrt{5}) + \beta(1-\sqrt{5})$. En se servant de (1) il vient :
   $$2 = (1-\beta)(1+\sqrt{5}) + \beta(1-\sqrt{5}) \iff 1 - \sqrt{5} = -2\sqrt{5}\beta \iff \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{-2\sqrt{5}} \iff \beta = \frac{5-\sqrt{5}}{10}$$
   On en déduit $\alpha = \frac{5+\sqrt{5}}{10}$ et $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}$

Exercice n° 21

Soit les événements B : choisir la porte gagnante au début ; G : gagner la voiture.
Il s'agit de comparer $\mathbb{P}(G)$ selon deux stratégies : on change de porte ou bien on conserve la porte initiale.
Dans les deux cas, on a $\mathbb{P}(G) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}_B(G) + \mathbb{P}(\overline{B})\mathbb{P}_{\overline{B}}(G) = \frac{1}{3}\mathbb{P}_B(G) + \frac{2}{3}\mathbb{P}_{\overline{B}}(G)$.

- Stratégie 1 : on change de porte. On a alors $\mathbb{P}_B(G) = 0$ et $\mathbb{P}_{\overline{B}}(G) = 1$ donc $\mathbb{P}(G) = \frac{2}{3}$.
- Stratégie 2 : on conserve la porte initiale. On a alors $\mathbb{P}_B(G) = 1$ et $\mathbb{P}_{\overline{B}}(G) = 0$ donc $\mathbb{P}(G) = \frac{1}{3}$.

Finalement, la stratégie 1 est plus favorable.