Chap 16 - EV de dimensions finies - Exercices

Exercice n° 1

VRAI ou FAUX sur l'ensemble du chapitre.
E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$, F et G en sont des sous-espaces vectoriels.

a) Tout espace vectoriel admet des sous-espaces de dimensions finies.
b) Un espace de dimension 3 admet 4 sous-espaces vectoriels : $\{\vec{0}\}$, un espace de dimension 1, un espace de dimension 2 et l'espace entier.
c) Tout espace vectoriel de dimension finie et non réduit à $\{\vec{0}\}$ admet une infinité de bases.
d) L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants et homogène est toujours un plan vectoriel.
e) Dans un espace de dimension finie, on peut trouver des familles libres infinies.
f) Si $\dim F = 3$, $\dim G = 2$ alors $\dim E \geq 5$.
g) Si $\dim E = 5$ et que $\dim F = \dim G = 3$ alors $F \cap G$ n'est pas réduit à $\{\vec{0}\}$.
h) Si $\dim F + \dim G = \dim E$ alors $F \oplus G = E$.
i) Si $\dim F + \dim G = \dim(F + G)$ alors $F \cap G = \{\vec{0}\}$.
j) $\mathbb{C}^2$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4.

1 Applications directes du cours

Exercice n° 2

On considère les vecteurs $\vec{x}(1; 1; 3)$ et $\vec{y}(2; -2; 1)$ de $\mathbb{R}^3$.

a) De quelle dimension est $E = \text{Vect}(\vec{x}, \vec{y})$?
b) Prouver que $E = \text{Vect}((1; -3; -2), (1; 5; 8))$.
c) Donner trois bases distinctes de E.
d) Quelle est la dimension d'un supplémentaire de E ?
e) Donner deux supplémentaires distincts de E.

Exercice n° 3

Dans $\mathbb{K}^3$, soit $\vec{u} = (1; 0; 2)$, $\vec{v} = (1; 1; 2)$, $\vec{w} = (1; 2; 2)$ et $\vec{t} = (2; 2; 2)$.

a) Prouver que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{t})$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}^3$.
b) En extraire une base.

Exercice n° 4

Dans $\mathbb{K}^4$, soit $\vec{u} = (2; 2; 2; 2)$, $\vec{v} = (-1; 1; 0; 2)$ et $\vec{w} = (1; 0; 1; 2)$.

a) Prouver que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une famille libre.
b) La compléter en une base.

Exercice n° 5

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère : $\vec{u} = (1; 2; 3; 4)$, $\vec{v} = (1; -1; 1; 3)$, $\vec{w} = (2; -5; 0; 5)$, $\vec{x} = (-1; 0; -1; 2)$ et $\vec{y} = (2; 3; 0; 1)$. Soit $F = \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ et $G = \text{Vect}(\vec{x}, \vec{y})$.
Quelles sont les dimensions de $F, G, F + G$ et $F \cap G$?

Exercice n° 6

Déterminer la dimension des espaces vectoriels suivants :

$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \,/\, x - 2y + 3z = 0\}$; $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \,/\, x = 2y = 3z\}$; $G = \{P \in \mathbb{K}_4[X] \,/\, P(1) = 0\}$.

2 Un peu plus dur

Exercice n° 7

Déterminer la dimension des espaces vectoriels suivants :

a) Polynômes : $E = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \ / \ P(2) = P(3) = 0\}$; $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \ / \ P(\pi) = 0\}$.

b) Matrices (pour $n > 0$) : $S_n = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \ / \ B = B^T\}$; $A_n = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \ / \ B = -B^T\}$.

c) Fonctions : $E = \mathrm{Vect}(\cos, \cos^2, \cos^3)$; $\mathcal{P} = \{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} \ / \ \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)\}$.

d) Suites : $E = \{u \in \mathbb{R}^\mathbb{N} \ / \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n\}$.

Exercice n° 8

Soit $n \in \mathbb{N}$. Prouver que $((X-i)^i)_{i \in [\![0;n]\!]}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice n° 9

Dans $\mathbb{R}^\mathbb{R}$, on considère $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$. Quel est le rang de $(f, g, f \circ f, f \circ g, g \circ f, g \circ g)$?

Exercice n° 10

On considère $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \ / \ (a, b, c) \in \mathbb{K}^3 \right\}$.

a) Prouver que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$.

b) Donner un supplémentaire de E.

3 Démontrer les résultats du cours et exercices théoriques

Exercice n° 11

Prouver le théorème de la base incomplète.

Exercice n° 12

Prouver que dans un espace de dimension $n \geq 1$ une famille de $p < n$ vecteurs n'est pas génératrice.

Exercice n° 13

Prouver la formule de Grassmann.

Exercice n° 14

Dans l'espace vectoriel E, on considère deux familles de vecteurs $\mathcal{F}_1 = \mathrm{Vect}(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $\mathcal{F}_2 = \mathrm{Vect}(y_i)_{1 \leq i \leq p}$ qui vérifient :

$$\mathrm{rg}(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2) = \mathrm{rg}(\mathcal{F}_1) + \mathrm{rg}(\mathcal{F}_2).$$

Prouver que les sous-espaces $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}_1)$ et $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}_2)$ sont en somme directe.

4 Plus difficile...

Exercice n° 15

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et des réels $a_0 < \cdots < a_n$. Prouver qu'il existe une base $(L_i)_{i \in [\![0;n]\!]}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ telle que $\forall i, j,\ P_i(a_j) = \delta_{i,j}$. *(Cette base est la base de Lagrange).*

Exercice n° 16

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 5, F et G deux sous-espaces de dimension 3.
Prouver qu'il existe un supplémentaire commun à F et G.