Correction des exercices du chapitre 16

Vrai ou Faux ?

E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$, F et G en sont des sous-espaces vectoriels.

a) Vrai. Tout espace vectoriel admet $\{\overrightarrow{0}\}$ comme sous-espaces vectoriel, qui est de dimension finie.

b) Faux. Un espace de dimension 3 admet une infinité de sous-espaces vectoriels. En effet, soit $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ deux vecteurs non colinéaires de E. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $d_\lambda = \text{Vect}(\overrightarrow{x} + \lambda\overrightarrow{y})$ est une droite vectorielle de E. Si $\mu \neq \lambda$, montrons que $d_\lambda \neq d_\mu$. Un vecteur commun à d_λ et d_μ est de la forme $k(\overrightarrow{x} + \lambda\overrightarrow{y}) = k'(\overrightarrow{x} + \mu\overrightarrow{y})$. On a donc $(k - k')\overrightarrow{x} + (k\lambda - k'\mu)\overrightarrow{y} = \overrightarrow{0}$. Les vecteurs $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ ne sont pas colinéaires donc la famille $(\overrightarrow{x}; \overrightarrow{y})$ est libre. On en déduit que $k = k'$ et, puisque $\lambda \neq \mu$, $k = k' = 0$. Finalement, le seul vecteur commun à d_λ et d_μ est le vecteur nul.
Remarque : en revanche, les SEV de E sont de dimension 0, 1, 2, 3 ou 4.

c) Vrai. Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{x}_1; \dots; \overrightarrow{x}_n)$ une base de E. On a $\overrightarrow{x}_1 \neq \overrightarrow{0}$ donc, pour tous scalaires non nuls λ et μ, $\lambda\overrightarrow{x}_1 \neq \mu\overrightarrow{x}_1$. Il suit que $\mathcal{B}_\lambda = (\lambda\overrightarrow{x}_1; \dots; \overrightarrow{x}_n)$ est une famille différente de $\mathcal{B}_\mu$. Il est aisé de montrer que ces familles sont toutes des bases de E.
Remarque : : comprenez-vous bien pourquoi on a pris la précaution d'avoir λ et μ non nuls ?

d) Vrai. Le cours donne la forme des solutions, cela correspond bien à un plan vectoriel (quelle que soient les solutions de l'équation caractéristique).

e) Faux. Dans un espace de dimension finie, le cardinal des familles libres et majoré par la dimension.

f) Faux. Un contre-exemple est fourni par $E = F = \mathbb{K}_2[X]$ et $G = \mathbb{K}_1[X]$.

g) Vrai. La formule de Grassmann donne $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G$. Comme $F+G$ est un SEV de E on a $\dim(F+G) \leq 5$ et donc $\dim(F \cap G) \geq 1$ ce qui signifie que $F \cap G$ n'est pas réduit à $\{\vec{0}\}$.

h) Faux. Un contre-exemple est fourni par $E = \mathbb{K}_3[X]$, $F = G = \mathbb{K}_1[X]$. On a $\dim F + \dim G = 2 + 2 + 4 = \dim E$ mais F et G ne sont clairement pas supplémentaires.

i) Vrai. Si $\dim F + \dim G = \dim(F + G)$ alors la formule de Grassmann assure que $\dim(F + G) = 0$ ce qui est équivalent à $F \cap G = \{\vec{0}\}$.

j) Vrai. Une base du $\mathbb{R}$-EV $\mathbb{C}^2$ est $((1; 1)\ ;\ (1; \mathrm{i})\ ;\ (\mathrm{i}; 1)\ ;\ (\mathrm{i}; \mathrm{i}))$. Sa dimension est donc 4.

1 Applications directes du cours

Exercice n° 1

a) Les vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ ne sont pas proportionnels, donc il ne sont pas colinéaires et la famille $(\vec{x}; \vec{y})$ est libre. C'est donc une base de E et $\dim(E) = 2$.

b) On doit prouver une égalité d'ensemble, il faut donc prouver une double inclusion. Voyons comment l'analyse de la dimension va nous permettre de « gagner une inclusion » :
Comme $(1; -3; -2) = \vec{y} - \vec{x}$ et $(1; 5; 8) = 3\vec{x} - \vec{y}$ on a $\text{Vect}((1; -3; -2); (1; 5; 8)) \underset{\text{sev}}{\subset} E$.
$(1; -3; -2)$ et $(1; 5; 8)$ ne sont pas proportionnels donc ils ne sont pas colinéaires et $\text{Vect}((1; -3; -2); (1; 5; 8))$ est un plan vectoriel de E.
Comme la dimension de E est 2, son seul plan vectoriel est E lui-même et $E = \text{Vect}((1; -3; -2); (1; 5; 8))$.

c) On a déjà $(\vec{x}, \vec{y})$ et $((1; -3; -2); (1; 5; 8))$ qui sont des bases de E. Toute famille de deux vecteurs non colinéaires de E fournira une 3è base, par exemple : $(\vec{y}, \vec{x})$.

d) On travaille dans $\mathbb{R}^3$ donc la dimension est 3. Les supplémentaires d'un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ sont des droites vectorielles.

e) Toute droite vectorielle qui n'est pas dans E est un supplémentaire de E. Par exemple : $\text{Vect}((0; 0; 1))$ et $\text{Vect}((1; 0; 0))$.

Exercice n° 2

a) Pour prouver que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{t})$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}^3$, il suffit de prouver qu'elle génère la base canonique de $\mathbb{K}^3$. On a :
$(1;0;0) = \vec{t} - \vec{w}$; $(0;1;0) = \vec{v} - \vec{u}$ et $(0;0;1) = \frac{1}{2}(\vec{u} - (1;0;0)) = \frac{1}{2}(\vec{u} - (\vec{t} - \vec{v})) = \frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{t} + \frac{1}{2}\vec{v}$.

b) On a $\vec{w} = \vec{v} + (0;1;0) = \vec{v} + \vec{v} - \vec{u} = 2\vec{v} - \vec{u}$ donc on peut retirer $\vec{w}$ qui est combinaison linéaire des autres vecteurs. On a alors toujours une famille génératrice et, comme est est maximale, c'est une base.

Exercice n° 3

a) Soit des scalaires α, β et γ tels que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}) = \vec{0}$. On obtient un système de 4 équations à 3 inconnues qui s'écrit sous forme matricielle : $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On échelonne la matrice avec l'algorithme de Gauss et on obtient : $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On en déduit que la seule solution du système est $\alpha = \beta = \gamma = 0$, on en déduit que la famille est libre.

b) On cherche à rajouter un vecteur tout en conservant la liberté de la famille. En reprenant la question précédente, rajouter un vecteur à la famille revient à rajouter une colonne à la matrice.

Si on part de la matrice échelonnée, en rajoutant la colonne $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ alors le rang devient 4. En « remontant » l'échelonnement, cette colonne n'est jamais modifiée ; on en déduit qu'en rajoutant le vecteur $(0;0;0;1)$ alors la famille est libre. Puisqu'elle est alors maximale, c'est une base.

Exercice n° 4

$F, G, F+G$ et $F \cap G$ sont des SEV de $\mathbb{R}^4$, leurs dimensions sont donc $0, 1, 2, 3$ ou 4.

— $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non-colinéaires, ils forment donc une famille libre et $rg(\vec{u};\vec{v}) = 2$. On a donc $rg(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) \in \{2;3\}$ selon que $\vec{w}$ soit combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ou non ; autrement dit, selon que la famille soit libre ou non.
Si on cherche à résoudre $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}$ d'inconnues α, β et γ on trouve une infinité de solutions : on en déduit que la famille est liée. Finalement, $\dim(E) = 2$.

item $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont non-colinéaires, ils forment donc une famille libre et $rg(\vec{x};\vec{y}) = \dim(F) = 2$.

— $F + G = \mathrm{Vect}(\vec{u};\vec{v};\vec{w};\vec{x};\vec{y}) = \mathrm{Vect}(\vec{u};\vec{v};\vec{x};\vec{y})$.
On vérifie que $(\vec{u};\vec{v};\vec{x};\vec{y})$ est une famille libre (en échelonnant la matrice dont les vecteurs colonnes sont $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{x}$ et $\vec{y}$), on en déduit que $\dim(F+G) = 4$.

— La formule de Grassmann nous donne : $\dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F+G) = 0$.

Exercice n° 5

— $E = \mathrm{Vect}((2;1;0),(-3;0;1))$. $((2;1;0),(-3;0;1))$ est génératrice de E, c'est aussi une famille libre (car ses deux vecteurs sont non-colinéaires), on en déduit que c'est une base de E et que $\dim(E) = 2$.

— $F = \mathrm{Vect}((1;\frac{1}{2};\frac{1}{3}))$ donc $\dim(F) = 1$.

— G est un SEV de $\mathbb{K}_4[X]$ donc sa dimension est dans $[\![0;5]\!]$. C'est l'ensemble des polynômes de $\mathbb{K}_4[X]$ divisibles par $(X-1)$. Ce n'est pas 0 (car $X - 1 \in G$) donc sa dimension est non nulle ; ce n'est pas $\mathbb{K}_4[X]$ (car $1 \notin G$) donc sa dimension n'est pas 5.

La famille $((X-1);(X-1)^2;(X-1)^3;(X-1)^4)$ est échelonnée donc libre, elle est dans G dont on a vu que la dimension est inférieure ou égale à 4. C'est donc une famille maximale de G et $\dim(G)=4$.

2 Un peu plus dur

Exercice n° 6

a) Polynômes :
- E est un SEV de $\mathbb{R}_4[X]$ donc sa dimension est inférieure ou égale à 5. Comme $E \neq \mathbb{R}_4[X]$, sa dimension est ≤ 4.
  La famille $((X-2)(X-3);(X-2)^2(X-3);(X-2)^3(X-3))$ est une famille échelonée et donc libre de polynômes de E, on a donc $\dim(E) \geq 3$.
  Comme $\mathbb{R}_1[X] \cap E = \{0\}$, ce sont des SEV supplémentaires et $\dim(\mathbb{R}_1[X]+E) = 2+\dim(E) =$ 5 ou 6. Or, $\mathbb{R}_1[X]+E$ est un SEV de $\mathbb{R}_4[X]$ donc sa dimension est ≤ 5. On en déduit que $\dim(E)=3$.
- F est un sous-espace de $\mathbb{R}[X]$ de dimension infinie. En effet, soit $(P_1;\dots P_n)$ une famille finie de F et soit $r=\max(\deg(P_i),\ i \in [\![1;n]\!])$. Le polynôme $(X-\pi)^{r+1}$ n'est pas dans $\mathrm{Vect}(P_i,\ i\in[\![1;n]\!])$, ce n'est donc pas une famille génératrice de F.

b) Matrices (pour $n>0$) : S_n et A_n sont les SEV des matrice symétriques et antisymétriques respectivement. La seule matrice qui soit symétrique et antisymétrique est la matrice nulle, ce sont donc des SEV en somme directe. On sait écrire toute matrice comme somme d'un élément de S_n et de A_n : ce sont donc des SEV supplémentaires et $\dim(S_n)+\dim(A_n)=n^2$.
La famille $(E_{1,1};\dots;E_{n,n};\ E_{i,j}+E_{j,i}$ avec $i\neq j)$ est une base de S_n donc sa dimension est $\frac{n(n+1)}{2}$.
On en déduit $\dim(A_n) = n^2-\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

c) Fonctions :
- La famille $\mathrm{Vect}(\cos,\cos^2,\cos^3)$ est génératrice de E ; on montre facilement qu'elle est libre, c'est donc une base de E et $\dim(E)=3$.
- $\mathcal{P}=\{f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\ /\ \forall x\in\mathbb{R}, f(-x)=f(x)\}$ est le SEV des fonctions paires. Il admet lui-même comme SEV l'ensemble des fonctions polynômiales paires dont $(x\mapsto x^{2i}_{i\in\mathbb{N}}$ est une famille libre infinie. C'est donc un SEV de dimension infinie.

d) Suites : $E=\mathrm{Vect}((2^n)_{n\in\mathbb{N}};((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}})$ est un plan de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice n° 7

Soit $n\in\mathbb{N}$. $((X-i)^i)_{i\in[\![0;n]\!]}$ est une famille échelonnée et donc libre de $n+1$ polynômes dans $\mathbb{K}_n[X]$ qui est de dimension $n+1$, c'en est donc une base.

Exercice n° 8

On a $f\circ f=f$, $f\circ g=g\circ f=g$ et $g\circ g=(x\mapsto x^4)$. On a donc $rg(f,g,f\circ f,f\circ g,g\circ f,g\circ g) = rg(f,g,x\mapsto x^4)=3$.

Exercice n° 9

a) $E=\mathrm{Vect}(E_{1,1}+E_{2,2};E_{1,2}+E_{2,1};E_{3,3})$ est un SEV de dimension 3 de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$.

b) Comme $\dim(\mathcal{M}_3(\mathbb{K}))=9$, la dimension d'un supplémentaire de E est $9-3=6$. $\mathrm{Vect}(E_{1,1};E_{2,2};E_{1,3};E_{2,3};E_{3,1};E$ est un SEV de dimension 6 dont l'intersection avec E est la matrice nulle, c'est donc un supplémentaire de E dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$.

3 Démontrer les résultats du cours et exercices théoriques

Exercice n° 10

Soit E un EV de dimension finie $p > 0$, $n \in [\![1; p]\!]$ et $(\overrightarrow{x}_1; \dots; \overrightarrow{x}_n)$ une famille libre de E.
De deux choses l'une :

- soit $(\overrightarrow{x}_1; \dots; \overrightarrow{x}_n))$ est génératrice de E et alors c'est une base ;
- soit elle ne l'est pas et il existe $\overrightarrow{x}_{n+1} \in (E \backslash \text{Vect}(\overrightarrow{x}_1; \dots; \overrightarrow{x}_n))$.
  Puisque $\overrightarrow{x}_{n+1} \notin \text{Vect}(\overrightarrow{x}_1; \dots; \overrightarrow{x}_n)$ alors $(\overrightarrow{x}_1; \dots; \overrightarrow{x}_n; \overrightarrow{x}_{n+1})$ est une famille libre. On recommence avec cette famille.

À chaque étape où on a le second cas le nombre de vecteurs augmente et on conserve une famille libre. Or, le cardinal des familles libres est majoré par p, on est donc certain que l'algorithme s'arrêtera, il fournit alors une base de E dont les n premiers vecteurs sont $(\overrightarrow{x}_1; \dots; \overrightarrow{x}_n)$.

Exercice n° 11

Soit E un espace de dimension n et soit $0 < p < n$. Si une famille de p vecteurs de E était génératrice de E alors les familles libres auraient moins de p vecteurs. Or, E étant de dimension n il admet une base de n vecteurs, c'est en particulier une famille libre qui comporte strictement plus de p vecteurs.

Exercice n° 12

Soit E un EV, F et G des SEV de dimensions finies. Montrons que $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$.

$F \cap G$ est un SEV de dimension finie (puisqu'il est inclus dans F). De deux choses l'une :

- Si $F \cap G = \{\vec{0}\}$ et alors la somme $F + G$ est directe. On sait qu'en concaténant des bases de F et G (qui existent car ce sont des EV de dimensions finies) on obtient une base de $F + G$. On a donc bien $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$.
- Sinon, soit $n > 0$ la dimension de $F \cap G$ et soit $(\overrightarrow{x_1}; \dots; \overrightarrow{x_n})$ une base de $F \cap G$. C'est une famille libre de F donc on peut la compléter en une base de F en lui rajoutant $\dim(F) - n$ vecteurs : $\overrightarrow{f_1}; \dots; \overrightarrow{f}_{\dim(F)-n}$.
  De façon analogue, $(\overrightarrow{x_1}; \dots; \overrightarrow{x_n})$ peut être complétée en une base de G en lui rajoutant les vecteurs $\overrightarrow{g_1}; \dots; \overrightarrow{g}_{\dim(G)-n}$.
  On a alors $F + G = \text{Vect}(\overrightarrow{x_i}; \overrightarrow{f_k}; \overrightarrow{g_l})_{i,k,l}$. En plus d'être génératrice de $F + G$, par construction $(\overrightarrow{x_i}; \overrightarrow{f_k}; \overrightarrow{g_l})_{i,k,l}$ est libre, c'est donc une base de $F + G$.
  On a $\dim(F + G) = n + (\dim(F) - n) + \dim(G) - n) = \dim(F) + \dim(G) - n = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$.

Exercice n° 13

Soit $F_1 = \text{Vect}(\mathcal{F}_1)$ et $F_2 = \text{Vect}(\mathcal{F}_2)$. On a :

$$\text{rg}(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2) = \text{rg}(\mathcal{F}_1) + \text{rg}(\mathcal{F}_2) \iff \dim(F_1 + F_2) = \dim(F_1) + \dim(F_2)$$

La formule de Grassmann s'applique et on a donc $\dim(F_1 \cap F_2) = 0$ ce qui équivaut à $F_1 \cap F_2 = \{\vec{0}\}$ ce qui signifie que la somme $F_1 + F_2$ est directe.

4 Plus difficile...

Exercice n° 14

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et des réels $a_0 < \dots < a_n$.
$\mathbb{R}_n[X]$ est un EV de dimension $n + 1$, ses bases ont donc $n + 1$ polynômes.
Pour $i \in [\![0; n]\!]$, on pose $L_i = \dfrac{\prod_{j \neq i}(X - a_j)}{\prod_{j \neq i}(a_i - a_j)}$ et on a créé une famille qui respecte la condition demandée.

Reste à voir que c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Comme elle est maximale, il suffit de montrer qu'elle est libre. Soit $(\lambda_i)_{i\in[\![0;,]\!]} \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que $\sum_i \lambda_i P_i = 0$.

Pour tout $j \in [\![0;n]\!]$, en évaluant en a_j on obtient $\lambda_j = 0$. Il suit que la famille $(L_i)_i$ est libre et donc une base de $\mathbb{R}^n[X]$.

Exercice n$^{\text{o}}$ 15

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 5, F et G deux sous-espaces de dimension 3. Il y a plusieurs situations possibles :

— Si $\dim(F\cap G) = 3$: alors $F = G$ et tout supplémentaire de l'un est supplémentaire de l'autre.

— Si $\dim(F\cap G) = 2$: alors $\dim(F+G) = 4$ et donc il existe $\vec{x} \in (E\backslash(F+G))$.
De plus, comme $\dim(F\cap G) = 2 < 3 = \dim(F)$ alors $F\cap G \neq F$ et donc il existe $\vec{f} \in F\backslash G$ et alors $F = F\cap G + \text{Vect}(\vec{f})$.
De façon analogue, il existe $\vec{g} \in G\backslash F$ et $G = F\cap G + \text{Vect}(\vec{g})$.
On pose $\vec{y} = \vec{f} + \vec{g}$ et alors $F + G = F\cap G + \text{Vect}(\vec{y})$.
$\text{Vect}(\vec{x};\vec{y})$ est un supplémentaire commun à F et G. En effet, d'une part $\dim(\text{Vect}(\vec{x};\vec{y})) = 2$ et d'autre part $E = (F+G) + \text{Vect}(\vec{x}) = F\cap G + \text{Vect}(\vec{y}) + \text{Vect}(\vec{x})$.

— Si $\dim(F\cap G) = 1$: alors soit $\vec{x} \neq \vec{0} \in F\cap G$. On a donc $F\cap G = \text{Vect}(\vec{x})$. On complète la famille libre $(\vec{x})$ en bases, d'une part de F et d'autre part de G. On obtient $(\vec{x};\vec{f_1};\vec{f_2})$ et $(\vec{x};\vec{g_1};\vec{g_2})$.
Montrons que $\text{Vect}(\vec{f_1}+\vec{g_1};\vec{f_2}+\vec{g_2})$ est un supplémentaire commun à F et G.
$\dim(F + \text{Vect}(\vec{f_1}+\vec{g_1};\vec{f_2}+\vec{g_2}) = \dim(F+G) = 5$ d'après la formule de Grassmann.
Or, $\dim(F) = 3$ et $\dim(\text{Vect}(\vec{f_1}+\vec{g_1};\vec{f_2}+\vec{g_2})) \leq 2$ donc $\dim(\text{Vect}(\vec{f_1}+\vec{g_1};\vec{f_2}+\vec{g_2})) = 2$ et c'est un supplémentaire de F. On procède de façon analogue pour montrer que c'est un supplémentaire de G.