Chapitre 17 - Intégration - Exercices

Ce chapitre est singulier en ce sens qu'il présente la construction de l'intégrale de Riemann mais n'apporte pas beaucoup de nouveautés du point de vue des exercices. En particulier les techniques de calcul d'intégrales sont celles que l'on connait déjà et qui sont revues dans la première partie des exercices.

Exercice n° 1

VRAI ou FAUX sur l'ensemble du chapitre.

f et g désignent des fonctions définies sur un intervalle $[a;b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

a) Si f est en escalier, $2f$ est aussi en escalier.
b) Si f est en escalier, $\cos f$ est aussi en escalier.
c) Si f est en escalier, $\max(f,2)$ est aussi en escalier.
d) f est intégrable sur $[a;b]$ si, et seulement si, f est en escalier.
e) f est intégrable sur $[a;b]$ si, et seulement si, f est continue.
f) Si f est intégrable sur $[a;b]$ et que $\displaystyle\int_{[a;b]} f \geq 0$ alors $f \geq 0$.
g) Si f est intégrable sur $[a;b]$ alors $\displaystyle\int_{[a;b]} f \leq \int_{[a;b]} |f|$.
h) Si f et g sont intégrables sur $[a;b]$ alors $\displaystyle\int_{[a;b]} f \times g \geq \int_{[a;b]} f \times \int_{[a;b]} g$.

1 Calcul de primitives et d'intégrales

Exercice n° 2

Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_{-1}^{1} |x| \,\mathrm{d}x \quad ; \quad I_2 = \int_{-1}^{2} \max(2, \mathrm{e}^x) \,\mathrm{d}x \quad ; \quad I_3 = \int_0^{\pi} \cos(\lfloor x \rfloor) \,\mathrm{d}x \quad ; \quad I_4 = \int_0^5 |3x-2| \,\mathrm{d}x$$

Exercice n° 3

Déterminer des primitives pour les fonctions suivantes :

$$f : x \longmapsto \mathrm{e}^{3x}\sin(x) \quad ; \quad g : x \longmapsto \cos(x)\mathrm{ch}(x)$$

Exercice n° 4

Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^{\pi} \cos^4(x) \,\mathrm{d}x \quad ; \quad I_2 = \int_0^{\pi} \sin^2(x)\sin(4x) \,\mathrm{d}x \quad ; \quad I_3 = \int_0^1 \mathrm{Arctan}(x) \,\mathrm{d}x \quad ; \quad I_4 = \int_0^1 x\mathrm{Arctan}(x) \,\mathrm{d}x$$

Exercice n° 5

Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x \quad ; \quad I_2 = \int_1^{64} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} \,\mathrm{d}x \quad ; \quad I_3 = \int_0^1 \frac{x^2}{x^2+x+2} \,\mathrm{d}x$$

$$I_4 = \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2-x+2} \,\mathrm{d}x \quad ; \quad I_5 = \int_{-1}^1 \frac{x^4+1}{x^3-4x^2+5x-6} \,\mathrm{d}x$$

2 Suites de fonctions, sommes de Riemann, formules de Taylor

Exercice n° 6

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\ \mathrm{d}x$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{n+x}\ \mathrm{d}x$.

Exercice n° 7

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \qquad ; \qquad \lim_{n\to+\infty} n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+k)^2} \qquad ; \qquad \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{n+k}}{n\sqrt{n}}$$

Exercice n° 8

En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, prouver que :

$$\forall x\in[0;\frac{\pi}{2}],\ x-\frac{x^3}{6}\leq\sin(x)\leq x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120} \qquad ; \qquad \forall x\geq 0,\ x-\frac{x^2}{2}\leq\ln(1+x)\leq x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}.$$

Exercice n° 9

Prouver que : $\forall x\in\mathbb{R},\ \mathrm{e}^x=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$.

3 Exercices théoriques

Exercice n° 10

Prouver que l'intégrale d'une fonction en escalier est bien définie, autrement dit que la somme donnée dans le cours ne dépend pas du choix de la subdivision adaptée à la fonction.

Exercice n° 11

Soit I un intervalle, g une fonction définie et continue sur I, positive sur I et telle que $\int_I g=0$.
Prouver que g est nulle.

Exercice n° 12

Soit $f:[a;b]\to\mathbb{R}$, continue telle que $\forall x\in[a;b],\ |f(x)|\leq 1$ et $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x=b-a$.
Pour $x\in[a;b]$, que vaut $f(x)$?

Exercice n° 13

Soit $f:[a;b]\to\mathbb{R}$, continue. Prouvez que la valeur moyenne de f est atteinte par f, autrement dit :

$$\exists c\in[a;b]\ /\ f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x.$$

Bonus : l'hypothèse de continuité est-elle indispensable ?

4 Plus difficile

Exercice n° 14

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^\pi \frac{n\sin(x)}{n+x}\ \mathrm{d}x$.

Exercice n° 15

Trouver toutes les fonctions $f\in\mathcal{C}^0([0;1],[0;1])$ qui vérifient $\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x=\int_0^1 (f(x))^2\ \mathrm{d}x$.