Ccorrection des exercices du chapitre 17

Exercice n° 1

a) Vrai. Si f est en escalier, alors il existe une subdivision $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ adaptée à f, c'est-à-dire que f est constante sur chaque intervalle $]x_i; x_{i+1}[$ où elle prend la valeur c_i ($i \in [\![0; n-1]\!]$). $2f$ est alors aussi constante sur ces intervalles (en prenant la valeur $2c_i$) et donc est aussi en escalier.

b) Vrai. En reprenant les notations de la réponse précédente, f prend la valeur $\cos(c_i)$ sur l'intervalle $]x_i; x_{i+1}[$ ($i \in [\![0; n-1]\!]$), elle est donc en escalier.

c) Vrai. Toutjours avec les notations précédentes, $\max(f, 2)$ prend la valeur $\max(c_i, 2)$ sur l'intervalle $]x_i; x_{i+1}[$ ($\forall i \in [\![0; n-1]\!]$) c'est donc une fonction en escalier.

d) Faux. $f(x) = x$ est intégrable sur $[a; b]$ mais n'est pas en escalier.

e) Faux. la fonction définie sur $[a; b]$ par $f(x) = \begin{cases} -1 \text{ si } x = a \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ n'est pas continue en a mais elle est intégrable (puisqu'elle est en escalier).

f) Faux. Le contre-exemple de la question précédente est également un contre-exemple pour cette question.

g) Vrai. C'est une conséquence de la croissance de l'intégrale : $f \leq |f|$ sur $[a; b]$ donc $e \int_{[a;b]} f \leq \int_{[a;b]} |f|$.

h) Faux. Sur l'intervalle $[0; 2]$ prenons $f(x) = \mathbf{1}_{[0;1]}(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in [0; 1] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ et $g = 1 - f = \mathbf{1}_{]1;2]}$. f et g sont en escalier et donc intégrables, fg est nulle et donc intégrable. On a : $\int_{[a;b]} f \times g = 0$ et $\int_{[a;b]} f \times \int_{[a;b]} g = 1$.

1 Calcul de primitives et d'intégrales

Exercice n° 2

Il faut commencer par comprendre l'allure de la courbe de l'intégrande. On découpe alors l'intervalle d'intégration en sous-intervalles sur lesquels l'intégrale est simple. On obtient $I_1 = 2$, $I_2 = \mathrm{e}^2 + 2\ln(2)$, $I_3 = 4 + \cos(1) + \cos(2) - \pi$ et $I_4 = \frac{147}{6}$

Exercice n° 3

Dans les deux cas on voit les fonctions trigonométriques comme les parties réelle ou imaginaire de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$, puis on intègre. Après calculs, $F(x) = \frac{\mathrm{e}^{3x}}{10}(-\cos(x) + 3\sin(x))$ et $G(x) = \frac{1}{2}(\cos(x)\mathrm{sh}(x) + \sin(x)\mathrm{ch}(x))$ conviennent.

Exercice n° 4

Pour les deux premières intégrales, on commence par linéariser l'expression trigonométrique. Pour les deux suivantes, il faut faire une IPP. Après calculs, on trouve : $I_1 = \frac{3}{8}\pi$, $I_2 = 0$, $I_3 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2)$ et $I_4 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

Remarque : pour I_2, on pouvait aussi astucieusement considérer l'intégrale de 0 à $\frac{\pi}{2}$ ainsi que l'intégrale de $\frac{\pi}{2}$ à π et faire le changement de variable $t = \pi - x$ dans la seconde. On obtient l'opposé de la première et donc $I_2 = 0$.

Exercice n° 5

Les deux premières intégrales se calculent par changement de variable, les deux suivantes sont des fractions rationnelles pour lesquelles il faut appliquer la méthode vue dans le TD spécifique. On obtient $1_1 = 2(1 - \ln(2)$, $I_2 = 11 - 6\ln(\frac{3}{2})$, $I_3 = 1 - \frac{1}{2}\ln(2) - \frac{3}{\sqrt{7}}(\mathrm{Arctan}(\frac{3}{\sqrt{7}}) - \mathrm{Arctan}(\frac{1}{\sqrt{7}}))$ et $I_4 = \frac{2}{\sqrt{7}}(\mathrm{Arctan}(\frac{1}{\sqrt{7}}) - \mathrm{Arctan}(\frac{-3}{\sqrt{7}}))$

2 Suites de fonctions, sommes de Riemann, formules de Taylor

Exercice n° 6

Il s'agit d'étudier la limite pour $n \to +\infty$ d'intégrales du type $\int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x$ (on a donc une suite de fonctions, vous étudierez cela l'année prochaine). Il faut commencer par imaginer l'allure de l'intégrande lorsque n varie. Ici, dans les deux cas, on comprend que à x fixé ($\neq 1$ dans la première) $f_n(x) \to 0$ et donc l'intuition est que les limites cherchées sont nulles. Alors, il est raisonnable de prendre la valeur absolue de l'intégrale (ce qui ne change rien pour la première) et de procéder par majoration :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in[0;1],\ 0\leq \frac{x^n}{1+x}\leq x^n \text{ et donc } 0\leq\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x\leq\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}\longrightarrow 0$$

$$\left|\int_0^\pi\frac{\sin(x)}{n+x}\,\mathrm{d}x\right|\leq\int_0^\pi\left|\frac{\sin(x)}{n+x}\right|\,\mathrm{d}x\leq\int_0^\pi\frac{1}{n+x}\,\mathrm{d}x\leq\int_0^\pi\frac{1}{n}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{n}\longrightarrow 0$$

Exercice n° 7

Chaque somme est une somme de Riemann, c'est-à-dire de la forme $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$, qui converge vers la valeur de l'intégrale $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ qu'on sait calculer.

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\longrightarrow\int_0^1\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}$$

$$\forall n>0,\ n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+k)^2}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+\frac{k}{n})^2}\longrightarrow\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^2}=\left[\frac{1}{1+x}\right]_1^0=\frac{1}{2}$$

$$\forall n>0,\ \sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{n+k}}{n\sqrt{n}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{k}{n}}\longrightarrow\int_0^1\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$$

Exercice n° 8

$\forall x\in[0;\frac{\pi}{2}],\ \sin(x)=x-\frac{x^3}{6}+\int_0^x\underbrace{\frac{(x-t)^3}{6}\sin(t)}_{\geq 0}\,\mathrm{d}t\geq x-\frac{x^3}{6}$ soit la première inégalité de l'encadrement voulu.

De façon analogue : $\forall x\in[0;\frac{\pi}{2}],\sin(x)=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\int_0^x\underbrace{\frac{(x-t)^5}{120}(-\sin(t))}_{\leq 0}\,\mathrm{d}t\leq x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$.

En procède de façon analogue avec $\ln(1+x)$ pour obtenir $\forall x\geq 0,\ x-\frac{x^2}{2}\leq\ln(1+x)\leq x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$.

Exercice n° 9

Soit $x\in\mathbb{R}$. On a :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad\left|\mathrm{e}^x-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right|\ =\ \left|\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\right|\ \leq\ \mathrm{e}^x\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t\ =\ \mathrm{e}^x\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\ \longrightarrow\ 0$$

car $\forall x\in\mathbb{R},\ x^n=o(n!)$.

3 Exercices théoriques

Exercice n° 10

On raisonne par l'absurde. Supposons que g soit non nulle, il existe donc $a\in I$ tel que $g(a)>0$. Comme g est continue, il existe un voisinage de a dans I sur lequel $g>\frac{g(a)}{2}$, notons-le J. Puisque g est positive, on a $\int_I g\geq\int_J g$ mais $\int_J g\geq\int_J\frac{g(a)}{2}>0$ ce qui est absurde car $\int_I g=0$.

Exercice n° 11

On a $\forall x\in[a;b],\ 1-f(x)\geq 0$ et, comme f est continue, alors $1-f$ aussi, c'est donc une fonction intégrable. $\int_{[a;b]}1-f=\int_{[a;b]}1-\int_{[a;b]}f=(b-a)-(b-a)=0$. $1-f$ étant continue, c'est donc la fonction nulle et $\forall x\in[a;b],\ f(x)=1$.

Exercice n° 12

f est continue sur $[a;b]$, il existe donc $(\alpha;\beta) \in [a;b]^2 \ / \ f([a;b]) = [f(\alpha);f(\beta)]$.
Pour $x \in [a;b]$ on a $f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$ et donc, en intégrant et en divisant par $b-a>0$, on a :

$$f(\alpha) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leq f(\beta)$$

f est continue entre α et β, le TVI s'applique : il existe c entre α et β tel que $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$.

Bonus : l'hypothèse de continuité est indispensable. la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} -1 \text{ si } x \in [0;1] \\ 1 \text{ si } x \in]1;2] \end{cases}$ a une valeur moyenne nulle mais ne s'annule jamais.

4 Plus difficile

Exercice n° 13

On a $\forall n > 0,\ \forall x \in [0;\pi],\ \dfrac{n\sin(x)}{n+x} = \dfrac{\sin(x)}{1+\frac{x}{n}}$ et $\dfrac{\sin(x)}{1+\frac{\pi}{n}} \leq \dfrac{\sin(x)}{1+\frac{x}{n}} \leq \sin(x)$.

Par croissance de l'intégrale sur $[0;\pi]$ il vient :

$$\underbrace{\frac{1}{1+\frac{\pi}{n}}\int_0^\pi \sin(x)\ \mathrm{d}x}_{\longrightarrow 2} \ \leq \ \int_0^\pi \frac{n\sin(x)}{n+x}\ \mathrm{d}x \ \leq \ \underbrace{\int_0^\pi \sin(x)\ \mathrm{d}x}_{=2}$$

Le théorème des gendarmes permet de conclure $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^\pi \frac{n\sin(x)}{n+x}\ \mathrm{d}x = 2$.

Exercice n° 14

On procède par analyse-synthèse.
Soit une fonction $f \in \mathcal{C}^0([0;1],[0;1])$ qui vérifie $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^1 (f(x))^2\ \mathrm{d}x$ soit $\displaystyle\int_0^1 f(x) - f^2(x)\ \mathrm{d}x = 0$.
$\forall x \in [0;1],\ 0 \leq f(x) \leq 1$ donc $\forall x \in [0;1],\ f(x) - f(x)^2 \geq 0$. Comme f est continue sur $[0;1]$, f^2 et $f - f^2$ le sont aussi et donc $f - f^2$ est la fonction nulle.
Autrement dit, $\forall x \in [0;1],\ f(x) \in \{0;1\}$. Comme f est continue, f est constante et vaut 0 ou 1.

La synthèse est triviale.