

Chapitre 18 - Applications Linéaires - Exercices

1 Applications directes du cours

Exercice n° 1

Décider si les applications suivantes sont linéaires ou non. Pour celles qui sont linéaires, donner des bases de l'image et du noyau.

$$\begin{aligned} f_1 : \begin{cases} \mathbb{K}^2 & \rightarrow \mathbb{K} \\ (x; y) & \mapsto 3x - y \end{cases} & \quad f_2 : \begin{cases} \mathbb{K}^2 & \rightarrow \mathbb{K} \\ (x; y) & \mapsto xy \end{cases} & \quad f_3 : \begin{cases} \mathbb{K}_2[X] & \rightarrow \mathbb{K}_2[X] \\ P & \mapsto P(X) + 1 \end{cases} \\ f_4 : \begin{cases} \mathbb{K}_2[X] & \rightarrow \mathbb{K}_2[X] \\ P & \mapsto P(X+1) \end{cases} & \quad f_5 : \begin{cases} \mathbb{K}_2[X] & \rightarrow \mathbb{K}[X] \\ aX^2 + bX + c & \mapsto bX + c \end{cases} & \quad f_6 : \begin{cases} \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto |f| \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice n° 2

Prouver de trois façons différentes que $\mathcal{A} = \{(x; y; z; t) \in \mathbb{R}^4 / x = y\}$.
Comparer les trois façons de procéder.

Exercice n° 3

Soit l'application f définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f((x; y; z)) = (x + z; y - z; z + y; x + y + 2z)$.

1. Justifier que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$.
2. Donner une base de $\text{Im}(f)$.
3. Donner une base de $\text{Ker}(f)$.
4. f est-elle injective? surjective? Pourrait-on répondre à cette question dès le début de l'exercice?

Exercice n° 4

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E . Montrer que $\ker(u)$ est un sous-espace stable par u .

Exercice n° 5

Les espaces suivants sont-ils isomorphes? (Si oui, proposer un isomorphisme).

$$\mathbb{R}^2 \text{ et } \mathbb{R}_1[X] \ ; \ \mathbb{R}_3[X] \text{ et } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ ; \ \mathbb{R}^5 \text{ et } \mathbb{R}^5 \ ; \ \mathbb{R}^4 \text{ et } \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

Exercice n° 6

Justifier que les applications suivantes sont des endomorphismes puis décider si ce sont des projecteurs, des symétries, des homothéties ... ou autre chose!

Dans les cas de symétries ou de projecteurs, on précisera les éléments caractéristiques.

$$\begin{aligned} u : \begin{cases} \mathbb{R}_1[X] & \rightarrow \mathbb{R}_1[X] \\ P & \mapsto \int_0^1 P(x) dx \end{cases} & \quad v : \begin{cases} \mathbb{R}^{\mathbb{R}} & \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \\ f(x) & \mapsto f(2x) \end{cases} \\ w : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x; y) & \mapsto (y; x) \end{cases} & \quad h : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x; y) & \mapsto (2x; 3y) \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice n° 7

On cherche à trouver tous les polynômes de $\mathbb{R}_3[X]$ qui vérifient $P(0) = 2$ et $P(1) = 3$.

On pose, pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$, $u(P) = (P(0); P(1))$.

1. Prouver que u est une application linéaire, préciser son espace d'arrivée.
2. Justifier que le problème posé revient à résoudre une équation linéaire.
3. Déterminer $\ker(u)$.
4. Résoudre le problème posé.

Exercice n° 8

$$\text{Soit } u : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ P & \longmapsto P'(1) \end{cases}.$$

1. Justifier que u est une forme linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Donner une équation linéaire de l'hyperplan $H = \ker(u)$ relativement aux coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

2 Vrai ou faux sur l'ensemble du chapitre

E désigne un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$, F un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

- a) Il existe (au moins) une application linéaire $E \rightarrow F$.
- b) L'application $z \mapsto |z|$ est une application linéaire $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$.
- c) $\Gamma = \{P \in \mathbb{K}[X]/P(1) = P'(1)\}$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.
- d) Soit $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$. Alors $\text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(v \circ u)$.
- e) Soit $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$. Alors $\text{Im}(v) \subset \text{Im}(v \circ u)$.
- f) L'application $aX + b \mapsto a + bX$ est une symétrie de $\mathbb{K}_1[X]$.
- g) L'application $z \mapsto \text{Re}(z)$ est une projection de $\mathbb{C}$.
- h) $\mathbb{R}_5[X]$ et $\mathbb{R}^5$ sont isomorphes.

Dans les questions qui suivent, u est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ qui vérifie $u((1; 0)) = (2; 0)$ et $u((0; 1)) = (0; 3)$.

- i) u est une homothétie.
- j) u est un automorphisme.

3 Un peu plus dur

Exercice n° 9

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 3, dont on note $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$ une base. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ défini par :

$$u(\vec{a}) = -2\vec{a} + 2\vec{c} \quad ; \quad u(\vec{b}) = 3\vec{b} \quad ; \quad u(\vec{c}) = -4\vec{a} + 4\vec{c}.$$

1. Déterminer une base de $\text{Ker}(u)$. u est-il injectif? Peut-il être surjectif?
2. Quel est le rang de u ? Déterminer une base de $\text{Im}(u)$.
3. Montrer que $E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u)$.

Exercice n° 10

Trouver un endomorphisme de $\mathbb{K}_3[X]$ dont le noyau est $\text{Vect}(X + 1 ; X^2 + X - 3)$.

Exercice n° 11

Trouver toutes les applications linéaires de $\mathcal{L}(\mathbb{K}_3[X], \mathbb{K}^2)$ dont le noyau est $\text{Vect}(X^2 - 3X)$.

Exercice n° 12

Soit l'application u définie par $\forall P \in \mathbb{R}_3[X], u(P) = P + (1 - X)P'$.

1. Prouver que $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X])$.
2. Déterminer une base de $\text{Im}(u)$.
3. Déterminer une base de $\text{Ker}(u)$.
4. Prouver que $\mathbb{R}_3[X] = \text{Im}(u) \oplus \text{Ker}(u)$.

Exercice n° 13

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x ; y) \mapsto \frac{1}{3}(-x + 2y ; -2x + 4y)$.
Montrer que f est la *truc* par rapport à *bidule* parallèlement à *machin*.

Exercice n° 14

Les espaces suivants sont-ils isomorphes ?
(On rappelle que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ représentent les matrices symétriques et antisymétriques de taille n).

$$\mathcal{S}_2 \text{ et } \{P \in \mathbb{K}_3[X] / P(5) = 0\} \quad ; \quad \mathcal{A}_n \text{ et } \mathcal{S}_n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

Exercice n° 15

Soit $A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$ et $u : \begin{cases} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & AX \end{cases}$.

Après avoir justifié que $u \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$, prouver que u est une symétrie et donner ses éléments caractéristiques.

Exercice n° 16

Trouver toutes les suites qui vérifient la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n - 1$.

4 Démontrer les résultats du cours et exercices théoriques

Exercice n° 17

Soit E un espace vectoriel et soit E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de E , on définit l'application $f : E_1 \times E_2 \rightarrow E$ par $f((x_1 ; x_2)) = x_1 + x_2$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer le noyau et l'image de f .
3. Que donne le théorème du rang ?

Exercice n° 18

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel (non réduit au vecteur nul) ; soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer que u est une homothétie si, et seulement si : $\forall \vec{x} \in E, (\vec{x} ; u(\vec{x}))$ est une famille liée.

Exercice n° 19

Soit E, F, G des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Prouver que :

$$\text{Ker}(v \circ u) = u^{-1}(\text{Ker}(v) \cap \text{Im}(u)).$$

5 Plus difficile...

Exercice n° 20

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les propriétés (1) à (3) sont équivalentes :

$$(1) : E = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f) \quad ; \quad (2) : \text{Im}(f) = \text{Im}(f \circ f) \quad ; \quad (3) : \text{Ker}(f) = \text{Ker}(f \circ f).$$

Exercice n° 21

Soit $n \geq 0$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ défini par $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], u(P) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$.

1. Pour $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$, déterminer le degré de $u(X^i)$.
2. En déduire le noyau et l'image de u .
3. Soit $Q \in \text{Im}(u)$. Montrer qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $u(P) = Q$ et $P(0) = P'(0) = 0$.

Exercice n° 22

Prouver que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall P \in \mathbb{K}_n[X], \exists ! Q \in \mathbb{K}_n[X] / P = \sum_{i=0}^n Q^{(i)}$$

Exercice n° 23

Soit E , un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = -\text{Id}_E$. Soit $\vec{x}$ un vecteur non nul de E .

1. Montrer que $u \in GL(E)$.
2. Prouver que $(\vec{x}, u(\vec{x}))$ est une famille libre. Dans la suite, on note $F_{\vec{x}}$ le plan vectoriel $\text{Vect}(\vec{x}, u(\vec{x}))$.
3. Prouver que $F_{\vec{x}}$ est stable par u .
4. Soit G un sous-espace vectoriel de E qui est stable par u . Prouver que :

$$\vec{x} \in G \iff F_{\vec{x}} \subset G$$

5. Trouver un exemple d'un tel endomorphisme u .