

Chapitre 18 - Applications Linéaires - Exercices

Exercice n° 1

Vrai ou faux sur l'ensemble du chapitre.

E désigne un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$, F un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

- a) Il existe (au moins) une application linéaire $E \rightarrow F$.
- b) L'application $z \mapsto |z|$ est une application linéaire $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$.
- c) $\Gamma = \{P \in \mathbb{K}[X] / P(1) = P'(1)\}$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.
- d) Soit $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$. Alors $\text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(v \circ u)$.
- e) Soit $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$. Alors $\text{Im}(v) \subset \text{Im}(v \circ u)$.
- f) L'application $aX + b \mapsto a + bX$ est une symétrie de $\mathbb{K}_1[X]$.
- g) L'application $z \mapsto \text{Re}(z)$ est une projection de $\mathbb{C}$.
- h) $\mathbb{R}_5[X]$ et $\mathbb{R}^5$ sont isomorphes.

Dans les questions qui suivent, u est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ qui vérifie $u((1; 0)) = (2; 0)$ et $u((0; 1)) = (0; 3)$.

- i) u est une homothétie.
- j) u est un automorphisme.

1 Applications directes du cours

Exercice n° 2

Décider si les applications suivantes sont linéaires ou non. Pour celles qui sont linéaires, donner des bases de l'image et du noyau.

$$\begin{aligned} f_1 : \begin{cases} \mathbb{K}^2 & \rightarrow \mathbb{K} \\ (x; y) & \mapsto 3x - y \end{cases} & \quad f_2 : \begin{cases} \mathbb{K}^2 & \rightarrow \mathbb{K} \\ (x; y) & \mapsto xy \end{cases} & \quad f_3 : \begin{cases} \mathbb{K}_2[X] & \rightarrow \mathbb{K}_2[X] \\ P & \mapsto P(X) + 1 \end{cases} \\ f_4 : \begin{cases} \mathbb{K}_2[X] & \rightarrow \mathbb{K}_2[X] \\ P & \mapsto P(X+1) \end{cases} & \quad f_5 : \begin{cases} \mathbb{K}_2[X] & \rightarrow \mathbb{K}[X] \\ aX^2 + bX + c & \mapsto bX + c \end{cases} & \quad f_6 : \begin{cases} \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto |f| \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice n° 3

Soit l'application f définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f((x; y; z)) = (x + z; y - z; z + y; x + y + 2z)$.

- 1. Justifier que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$.
- 2. Donner une base de $\text{Im}(f)$.
- 3. Donner une base de $\text{Ker}(f)$.
- 4. f est-elle injective ? surjective ? Pouvait-on répondre à cette question dès le début de l'exercice ?

Exercice n° 4

Les espaces suivants sont-ils isomorphes ? (Si oui, proposer un isomorphisme).

$$\mathbb{R}^2 \text{ et } \mathbb{R}_1[X] \quad ; \quad \mathbb{R}_3[X] \text{ et } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \quad ; \quad \mathbb{R}^5 \text{ et } \mathbb{R}^5 \quad ; \quad \mathbb{R}^4 \text{ et } \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

Exercice n° 5

Décider si les endomorphismes suivants sont des projecteurs, des symétries, des homothéties ... ou autre chose !
Dans les cas de symétries ou de projecteurs, on précisera les éléments caractéristiques.

$$\begin{aligned} u : \begin{cases} \mathbb{R}_1[X] & \rightarrow \mathbb{R}_1[X] \\ P & \mapsto \int_0^1 P(x) dx \end{cases} & \quad v : \begin{cases} \mathbb{R}^{\mathbb{R}} & \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \\ f(x) & \mapsto f(2x) \end{cases} \\ w : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x; y) & \mapsto (y; x) \end{cases} & \quad h : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x; y) & \mapsto (2x; 3y) \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice n° 6

On cherche à trouver tous les polynômes de $\mathbb{R}_3[X]$ qui vérifient $P(0) = 2$ et $P(1) = 3$.
On pose, pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$, $u(P) = (P(0); P(1))$.

1. Prouver que u est une application linéaire, préciser son espace d'arrivée
2. Justifier que le problème posé revient à résoudre une équation linéaire.
3. Déterminer $\ker(u)$.
4. Résoudre le problème posé.

Exercice n° 7

Soit $u : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \rightarrow \mathbb{R} \\ P & \mapsto P'(1) \end{cases}$.

1. Justifier que u est une forme linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Donner une équation linéaire de l'hyperplan $H = \ker(u)$ relativement aux coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

2 Un peu plus dur

Exercice n° 8

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 3, dont on note $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$ une base. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ défini par :

$$u(\vec{a}) = -2\vec{a} + 2\vec{c} \quad ; \quad u(\vec{b}) = 3\vec{b} \quad ; \quad u(\vec{c}) = -4\vec{a} + 4\vec{c}.$$

1. Déterminer une base de $\ker(u)$. u est-il injectif? Peut-il être surjectif?
2. Quel est le rang de u ? Déterminer une base de $\text{Im}(u)$.
3. Montrer que $E = \ker(u) \oplus \text{Im}(u)$.

Exercice n° 9

Trouver un endomorphisme de $\mathbb{K}_3[X]$ dont le noyau est $\text{Vect}(X + 1 ; X^2 + X - 3)$.

Exercice n° 10

Trouver toutes les applications linéaires de $\mathcal{L}(\mathbb{K}_3[X], \mathbb{K}^2)$ dont le noyau est $\text{Vect}(X^2 - 3X)$.

Exercice n° 11

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X])$ défini par $\forall P \in \mathbb{R}_3[X], u(P) = P + (1 - X)P'$.

1. Déterminer une base de $\text{Im}(u)$.
2. Déterminer une base de $\ker(u)$.
3. Prouver que $\mathbb{R}_3[X] = \text{Im}(u) \oplus \ker(u)$.

Exercice n° 12

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x ; y) \mapsto \frac{1}{3}(-x + 2y ; -2x + 4y)$.

Montrer que f est la *truc* par rapport à *bidule* parallèlement à *machin*.

Exercice n° 13

Les espaces suivants sont-ils isomorphes?

(On rappelle que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ représentent les matrices symétriques et antisymétriques de taille n).

$$\mathcal{S}_2 \text{ et } \{P \in \mathbb{K}_3[X] / P(5) = 0\} \quad ; \quad \mathcal{A}_n \text{ et } \mathcal{S}_n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

Exercice n° 14

Soit $A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$ et $u : \begin{cases} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto AX \end{cases}$.

Après avoir justifié que $u \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$, prouver que u est une symétrie et donner ses éléments caractéristiques.

Exercice n° 15

Trouver toutes les suites qui vérifient la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n + 1$.

3 Démontrer les résultats du cours et exercices théoriques

Exercice n° 16

Soit E un espace vectoriel et soit E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de E , on définit l'application $f: E_1 \times E_2 \rightarrow E$ par $f((x_1; x_2)) = x_1 + x_2$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer le noyau et l'image de f .
3. Que donne le théorème du rang?

Exercice n° 17

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel (non réduit au vecteur nul); soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

Montrer que u est une homothétie si, et seulement si : $\forall \vec{x} \in E, (\vec{x}; u(\vec{x}))$ est une famille liée.

Exercice n° 18

Soit E, F, G des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Prouver que :

$$\text{Ker}(v \circ u) = u^{-1}(\text{Ker}(v) \cap \text{Im}(u)).$$

4 Plus difficile...

Exercice n° 19

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les propriétés (1) à (3) sont équivalentes :

$$(1) : E = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f) \quad ; \quad (2) : \text{Im}(f) = \text{Im}(f \circ f) \quad ; \quad (3) : \text{Ker}(f) = \text{Ker}(f \circ f).$$

Exercice n° 20

Soit $n \geq 0$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ défini par $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], u(P) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$.

1. Pour $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$, déterminer le degré de $u(X^i)$.
2. En déduire le noyau et l'image de u .
3. Soit $Q \in \text{Im}(u)$. Montrer qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $u(P) = Q$ et $P(0) = P'(0) = 0$.

Exercice n° 21

Prouver que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall P \in \mathbb{K}_n[X], \exists ! Q \in \mathbb{K}_n[X] / P = \sum_{i=0}^n Q^{(i)}$$

Exercice n° 22

Soit E , un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = -\text{Id}_E$. Soit $\vec{x}$ un vecteur non nul de E .

1. Montrer que $u \in GL(E)$.
2. Prouver que $(\vec{x}, u(\vec{x}))$ est une famille libre. Dans la suite, on note $F_{\vec{x}}$ le plan vectoriel $\text{Vect}(\vec{x}, u(\vec{x}))$.
3. Prouver que $F_{\vec{x}}$ est stable par u .
4. Soit G un sous-espace vectoriel de E qui est stable par u . Prouver que :

$$\vec{x} \in G \iff F_{\vec{x}} \subset G$$

5. Trouver un exemple d'un tel endomorphisme u .