Correction des exercices du chapitre 18

Exercice n° 1

a) Vrai. L'application nulle définie pour tout $\vec{x} \in E$ par $n(\vec{x}) = \vec{0}_F$ est linéaire.

b) Faux. $|-(1+\mathrm{i})| \neq -|1+\mathrm{i}|$ et donc le module ne respecte pas les combinaisons linéaires : ce n'est pas une application linéaire $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$.

c) Vrai. Soit les endomoprphismes de $\mathbb{K}[X]$: Id, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}$ et $\phi : P \mapsto P(1)$.
Alors, $\phi \circ (\mathrm{Id} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}$ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ et $\Gamma = \{P \in \mathbb{K}[X] / P(1) = P'(1)\} = \ker(\phi \circ (\mathrm{Id} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ et donc un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel.

d) Vrai. Soit $\vec{x} \in \mathrm{Ker}(u)$, on a $v \circ u(\vec{x}) = v(u(\vec{x})) = v(\vec{0}) = \vec{0}$ et donc $\vec{x} \in \mathrm{Ker}(v \circ u)$.
On a donc bien $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(v \circ u)$.

e) Faux. Si on prend $E = \mathbb{R}^2$, $v = \mathrm{Id}$ et u l'endomoprphisme nul on a $\mathrm{Im}(v) = \mathbb{R}^2$ et $\mathrm{Im}(v \circ u) = \{(0;0)\}$.

f) Vrai. Notons $\phi : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{K}_1[X] \to \mathbb{K}_1[X] \\ aX + b \mapsto a + bX \end{array} \right.$.
ϕ est clairement un endomorphisme de $\mathbb{K}_1[X]$ et $\phi \circ \phi = \mathrm{Id}$ donc est une symétrie de $\mathbb{K}_1[X]$.
Exercice : trouvez ses éléments caractéristiques.

g) Vrai ou faux selon qu'on considère $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}$-EV ou $\mathbb{C}$-EV. Si on a toujours $\mathrm{Re} \circ \mathrm{Re} = \mathrm{Re}$, dans le second cas l'application Re n'est pas linéaire (par exemple : $\mathrm{Re}(\mathrm{i}(1+\mathrm{i})) \neq \mathrm{i}\mathrm{Re}(1+\mathrm{i})$).

h) Faux. Deux espaces de dimensions finies sont isomorphes si, et seulement si, ils ont la même dimension. Or, $\dim(\mathbb{R}_5[X]) = 6$ et $\dim(\mathbb{R}^5) = 5$.

i) Faux. $u((1;1)) = u((1;0)) + u((0;1)) = (2;0) + (0;3) = (2;3)$ n'est pas colinéaire avec $(1;1)$ donc u n'est pas une homothétie.

j) $u((1;0)) = (2;0)$ et $u((0,1)) = (0,3)$ ne sont pas colinéaires, ils forment donc une base de $\mathbb{R}^2$.
u envoie une base de $\mathbb{R}^2$ sur une base de $\mathbb{R}^2$ donc u est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.

1 Applications directes du cours

Exercice n° 2

— Soit $(x_1;y_1)$ et $(x_2;y_2)$ dans $\mathbb{K}^2$ ainsi que deux scalaires λ et μ. On a :

$$\begin{aligned} f_1((\lambda(x_1;\lambda y_1) + \mu(x_2;y_2)) &= f_1((\lambda x_1 + \mu x_2 \ ; \ y_1 + \mu y_2)) \\ &= 3(\lambda x_1 + \mu x_2) - (y_1 + \mu y_2) \\ &= \lambda(3x_1 - y_1) + \mu(3x_2 - y_2) \\ &= \lambda f_1((x_1;y_1)) + \mu f_1((x_2;y_2)) \end{aligned}$$

donc f_1 est linéaire. Déterminons son noyau, soit $(x;y) \in \mathbb{K}^2$:

$$(x;y) \in \mathrm{Ker}(f_1) \iff 3x - y = 0 \iff y = 3x \iff (x;y) \in \mathrm{Vect}((1;3))$$

On a donc $\mathrm{Ker}(f_1) = \mathrm{Vect}((1;3))$. Déterminons $\mathrm{Im}(f_1)$. On sait que c'est un SEV de $\mathbb{K}$, c'est donc $\mathbb{K}$ ou $\{0\}$, cette alternative est simple à décider : si $\mathrm{Im}(u)$ était $\{0\}$ cela signifierait que f_1 est l'application nulle, or $f_((1;0)) = 3 \neq 0$. On en déduit que $\mathrm{Im}(f_1) = \mathbb{K}$.
(On pouvait également se servir du théorème du rang pour trouver Im(f_1). Voyez-vous comment ?)

— f_2 n'est pas linéaire : $f_2(2(1;1)) = 4 \neq 2f_2((1;1))$.

— f_3 n'est pas linéaire : $f_3(0) = 1 \neq 0$.

— f_4 est linéaire. Déterminons son image : $\mathrm{Im}(f_4) = \mathrm{Vect}(f_4(1); f_4(X)) = \mathrm{Vect}(1; X+1)$.
$(1; X+1)$ est une famille échelonnée donc libre de $\mathbb{K}_1[X]$, c' en est donc une base. On en déduit que $\mathrm{Im}(f_4) = K_1[X]$. Puisque f_4 envoie une base de $\mathbb{K}_1[X]$ sur une base de $\mathbb{K}_1[X]$ c'est un automorphisme de $\mathbb{K}_1[X]$ et son noyau est $\{0\}$.

— f_5 est linéaire. Déterminons son noyau : soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{K}_2[X]$.
On a : $f_5(P) = 0 \iff bX + c = 0 \iff b = c = 0 \iff P \in \mathrm{Vect}(X^2)$. On a donc $\mathrm{Ker}(f_5) = \mathrm{Vect}(X^2)$.
Déterminons son image : $\mathrm{Im}(f_5) = \mathrm{Vect}(f_5(1); f_5(X); f_5(X^2)) = \mathrm{Vect}(1; X; 0) = \mathrm{Vect}(1; X) = K_1[X]$.
(f_5 est la projection sur $\mathbb{K}_1[X]$ parallèlement à Vect(X^2)).

— f_6 n'est pas linéaire : $f_6(-\cos) = |\cos| \neq -|\cos|$

Remarque : pour les applications linéaires en dimension finie, il faut toujours avoir le théorème du rang en tête car il constitue un lien profond entre le noyau et l'image. Ici, j'ai rédigé l'exercice sans m'en servir mais on aurait gagné du temps en l'utilisant.

Exercice n° 3

1. On vérifie facilement que f est linéaire et donc $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$.
2. On a :
$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(f) &= \mathrm{Vect}(f((1;0;0))\ ;\ f((0;1;0))\ ;\ f((0;0;1))) \\ &= \mathrm{Vect}((1;0;0;1)\ ;\ (0;1;1;1)\ ;\ (1;-1;1;2))\end{aligned}$$
$((1;0;0;1)\ ;\ (0;1;1;1)\ ;\ (1;-1;1;2))$ est donc génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. Déterminons le rang de cette famille de vecteurs en échelonnant la matrice dont ils sont les colonnes :
$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&1&1\\1&1&2\end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&2\\0&0&2\end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$
La matrice est de rang maximal, on en déduit que la famille est libre c'est donc une base de $\mathrm{Im}(f)$.
3. On applique le théorème du rang : $\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) \iff 3 = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + 3$. On en déduit que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0$ ce qui signifie que $\mathrm{Ker}(f) = \{(0;0;0)\}$.
4. $\mathrm{Ker}(f) = \{(0;0;0)\}$ donc f est injective.
$\mathrm{Im}(f) \neq \mathbb{R}^4$ donc f n'est pas surjective.
On pouvait affirmer la non-sujectivité de f dès le début de l'exercice : en effet, $\mathrm{Im}(f)$ est un SEV de $\mathbb{R}^4$ dont la dimension est inférieure ou égale à $\dim(R^3) = 3$, ça ne pouvait donc pas être $\mathbb{R}^4$.
Pour l'injectivité, on ne pouvait rien dire *a priori*.

Exercice n° 4

Deux EV de dimensions finies sont isomorphes si, et seuelemnt si, ils ont même dimension. Le cas échéant, pour définir un isomorphisme, il suffit de définir une sapplication linéaire qui envoie une base (de l'espace de départ) sur une base de l'espace d'arrivée.

— $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}_1[X]$ ont pour dimension 2, ils sont donc isomorphes. L'application linéaire u définie par $u((1;0)) = 1$ et $u((0;1)) = X$ envoie une base de $\mathbb{R}^2$ sur une base de $\mathbb{R}_1[X]$, c'est donc un isomorphisme.
(On a donc $u((a;b)) = a + bX$).

— $\dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4$ et $\dim(\mathcal{M}_3(\mathbb{R})) = 9$, ce ne sont pas des espaces isomorphes.

— Tout espace de dimension finie est isomorphe à lui-même et l'identité est un automorphisme.
($\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^5}$ n'est pas le seul automorphisme de $\mathbb{R}^5$. Sauriez-vous en donner d'autres ? Les donner tous ?)

— $\mathbb{R}^4$ et $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ont pour dimension 4. L'application linéaire v définie par $v((1;0;0;0)) = E_{1,1}$, $v((0;1;0;0)) = E_{1,2}$, $v((0;0;1;0)) = E_{2,1}$ et $v((0;0;0;1)) = E_{2,2}$ définit un isomorphisme entre $\mathbb{R}^4$ et $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice n° 5

L'énoncé annonce que les applications sont toutes des endomorphismes, on ne le vérifie donc pas (mais il est conseillé de le faire de tête).
Un endomorphisme f est un projecteur si, et seulement si, il vérifie $f \circ f = f$. Le cours nous dit alors que f est la projection sur $\mathrm{Im}(f)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f)$.
De façon analogue, f est une symétrie si et seulement si, $f \circ f = \mathrm{Id}$, ses éléments caractéristiques sont alors $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$.
Enfin, f est une homothétie si, et seulement si, $(\vec{x}\ ;\ f(\vec{x}))$ est liée quel que soit $\vec{x}$.

— u est la projection sur $\mathbb{R}$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(X - \frac{1}{2})$.

— $v(\exp) = (x \mapsto \mathrm{e}^{2x})$ et $v \circ v(\exp) = (x \mapsto \mathrm{e}^{4x})$ donc v n'est ni une homothétie, ni une projection, ni une symétrie.

— w est la symétrie par rapport à $\mathrm{Vect}((1;1))$ parallèlement à $\mathrm{Vect}((-1;1))$.

— h n'est pas une homotétie (vu dans le vrai ou faux). On a $h \circ h((1;1)) = h((2;3)) = (4;9)$ donc h n'est pas une projection ou une symétrie.

2 Un peu plus dur

Exercice n° 6

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3, dont on note $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ une base. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ défini par :

$$u(\vec{a}) = -2\vec{a} + 2\vec{c} \quad ; \quad u(\vec{b}) = 3\vec{b} \quad ; \quad u(\vec{c}) = -4\vec{a} + 4\vec{c}.$$

1. Soit $\vec{v} \in E$. On écrit $\vec{v}$ dans la base $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$: $\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ avec $(x; y; x) \in \mathbb{K}^3$. On a :

$$\begin{aligned}\vec{v} \in \mathrm{Ker}(u) &\iff u(\vec{v}) = \vec{0} \iff u(x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}) = \vec{0} \iff xu(\vec{a}) + yu(\vec{b}) + zu(\vec{c}) = \vec{0}\\ &\iff x(-2\vec{a} + 2\vec{c}) + y(3\vec{b}) + z(-4\vec{a} + 4\vec{c}) = \vec{0} \iff (-2x - 4z)\vec{a} + 3y\vec{b} + (2x + 4y)\vec{c} = \vec{0}\end{aligned}$$

   La famille $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$ est une base, elle est donc libre et on a :

$$\vec{v} \in \mathrm{Ker}(u) \iff \begin{cases} -2x - 4z = 0 \\ 3y = 0 \\ 2x + 4z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2z \\ y = 0 \end{cases} \iff \vec{v} \in \mathrm{Vect}(-2\vec{a} + \vec{c}).$$

   Finalement, $\mathrm{Ker}(u)$ est ue droite vectorielle dont $(-2\vec{a} + \vec{c})$ est une base. Puisque $\mathrm{Ker}(u) \neq \{\vec{0}\}$ alors u n'est pas injectif. Le théorème du rang donne $3 = 1 + \dim(\mathrm{Im}(u))$ soit $\dim(\mathrm{Im}(u)) = 2$ et donc $\mathrm{Im}(u) \neq E$ ce qui signifie que u n'est pas surjectif.

2. On a déjà vu que le rang de u est 2. On a :

$$\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(u(\vec{a}); u(\vec{b}); u(\vec{c})) = \mathrm{Vect}(-2\vec{a} + 2\vec{c}\ ;\ 3\vec{b}\ ;\ -4\vec{a} + 4\vec{c}) = \mathrm{Vect}(\vec{a} + \vec{c}\ ;\ \vec{b})$$

   La famille $(\vec{a} + \vec{c}\ ;\ \vec{b})$ est libre (puisque $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$ l'est) dans $\mathrm{Im}(u)$ qui est de dimension 2 ; c'est donc une base de $\mathrm{Im}(u)$.

3. La somme $\mathrm{Ker}(u)) + \mathrm{Im}(u)$ génère la base $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$ donc elle génère E. En effet :

$$\vec{a} = \underbrace{-\frac{1}{3}(-2\vec{a} + \vec{c})}_{\in \mathrm{Ker}(u)} + \underbrace{(-\frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{c}))}_{\in \mathrm{Im}(u)} \quad ; \quad \vec{b} = \underbrace{\vec{0}}_{\in \mathrm{Ker}(u)} + \underbrace{\vec{b}}_{\in \mathrm{Im}(u)} \quad ; \quad \vec{c} = \underbrace{\frac{1}{3}(-2\vec{a} + \vec{c})}_{\in \mathrm{Ker}(u)} + \underbrace{\frac{2}{3}(\vec{a} + \vec{c})}_{\in \mathrm{Im}(u)}$$

   Comme on a également $\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(u)) + \dim(\mathrm{Im}(u))$ on peut conclure que $E = \mathrm{Ker}(u)) \oplus \mathrm{Im}(u)$.

Exercice n° 7

On définit une application linéaire en donneant les images des vecteurs d'une base de l'espace de départ. $(1; X + 1; X^2 + X - 3, X^3)$ est une famille échelonnée et donc libre de $\mathbb{K}_3[X]$. Puisqu'elle est maximale, c'est donc une base de $\mathbb{K}_3[X]$. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{K}_3[X]$ défini par $u(1) = 1$, $u(X+1) = 0$, $u(X^2+X-3) = 0$ et $u(X^3) = X$. On a clairement $\mathrm{Vect}(X + 1, X^2 + X - 3) \subset \mathrm{Ker}(u)$.
$\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(1; X) = \mathbb{R}_1[X]$ alors le théorème du rang nous permet d'affirmer que $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = 4 - 2 = 2$ et donc $\mathrm{Vect}(X + 1, X^2 + X - 3) = \mathrm{Ker}(u)$.

Exercice n° 8

Procédons par analyse-synthèse. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}_3[X], \mathbb{K}^2)$ telle que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Vect}(X^2 - 3X)$. Le théorème du rang s'applique et alors $4 = 1 + \dim(\mathrm{Im}(u))$ donc $\mathrm{Im}(u)$ est un SEV de $\mathbb{K}^2$ dont la dimension est 3 : cela n'existe pas. Finalement, il n'y a aucune application qui vérifie les conditions demandées.

Exercice n° 9

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X])$ défini par $\forall P \in \mathbb{R}_3[X],\ u(P) = P + (1 - X)P'$.

1. $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(u(1); u(X); u(X^2); u(X^3)) = \mathrm{Vect}(1; 1; 1 - X^2; 1 - 2X^3) = \mathrm{Vect}(1; 1 - X^2; 1 - 2X^3)$.
   La famille $(1; 1 - X^2; 1 - 2X^3)$ est échelonnée et donc libre, c'est donc une base de $\mathrm{Im}(u)$.
2. $\dim(\mathrm{Im}(u)) = 3$, le théorème du rang nous donne $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = 1$. Autrement dit : $\mathrm{Ker}(u)$ est une droite vectorielle et tout polynôme non nul de $\mathrm{Ker}(u)$ en constitue une base. Or, on a vu que $u(1) = u(X) \iff u(1 - X) = 0$. On en déduit que $(1 - X)$ est une base de $\mathrm{Ker}(u)$.

3. On a $\mathrm{Im}(u)+\mathrm{Ker}(u)=\mathrm{Vect}(1;1-X^2;1-2X^3)+\mathrm{Vect}(1-X)=\mathrm{Vect}(1;1-X;1-X^2;1-2X^3)$. La famille $(1;1-X;1-X^2;1-2X^3)$ est échelonnée et donc libre, on en déduit que $\dim(\mathrm{Im}(u)+\mathrm{Ker}(u))=4$ et donc $\mathrm{Im}(u)+\mathrm{Ker}(u)=\mathbb{R}_3[X]$.
   On a également $\dim(\mathrm{Im}(u))+\dim(\mathrm{Ker}(u))=\dim(\mathbb{R}_3[X])$, on en déduit que $\mathbb{R}_3[X]=\mathrm{Im}(u)\oplus\mathrm{Ker}(u)$.

Exercice n° 10

Clairement, $f\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$. Soit $(x;y)\in\mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{aligned}
f\circ f(\ (x\ ;\ y)\ ) &= f(\ f(x;y)\ )=f\left(\frac{1}{3}(-x+2y\ ;\ -2x+4y)\right)\\
&=\frac{1}{9}\left(-(-x+2y)+2(-2x+4y)\ ;\ -2(-x+2y)+4(-2x+4y)\right)\\
&=\frac{1}{9}(-3x+6y\ ;\ -6x+12y)=\frac{1}{3}(-x+2y\ ;\ -2x+4y)\\
&=f(\ (x\ ;\ y)\ )
\end{aligned}$$

Finalement, f est un projecteur de $\mathbb{R}^2$. Ses éléments caractéristiques sont :
- $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Vect}(f((1;0));f((0;1)))=\mathrm{Vect}((-\frac{1}{3};-\frac{2}{3})\ ;\ (\frac{2}{3};\frac{4}{3}))=\mathrm{Vect}((1;2))$.
- Le théorème du rang nous donne $\dim(\mathrm{Ker}(f))=2-1=1$ et comme $(2;1)\in\mathrm{Ker}(f)$ on en déduit que $\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Vect}((2;1))$.

Finalement, f est la projection sur $\mathrm{Vect}((1;2))$ parallèlement à $\mathrm{Vect}((2;1))$.

Exercice n° 11

- $\dim(\mathcal{S}_2)=3$ et $\dim(\{P\in\mathbb{K}_3[X]/P(5)=0\}=3$ donc ce sont des espaces isomorphes.
- Pour $n\in\mathcal{N}$, on a $\dim(\mathcal{S}_n)=\frac{n(n+1)}{2}$ et $\dim(\mathcal{A}_n)=\frac{n(n-1)}{2}$, ce ne sont donc pas des espaces isomorphes.

3 Démontrer les résultats du cours et exercices théoriques

Exercice n° 12

Soit E un espace vectoriel et soit E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de E, on définit l'application $f\colon E_1\times E_2\to E$ par $f(x_1,x_2)=x_1+x_2$.

1. La linéarité de f se montre sans difficulté.
2. $\mathrm{Im}(f)=\{x_1+x_2\ /\ x_1\in E_1 \text{ et } x_2\in E_2\}$ c'est la définition de E_1+E_2.
   $\mathrm{Ker}(f)=\{(x_1;x_2)\in E_1\times E_2\ /\ x_1+x_2=0\}=\{(x;-x)\ /\ x\in E_1\cap E_2\}$ qui est isomorphe à $E_1\cap E_2$.
3. On applique le théorème du rang :

$$\dim(E_1\times E_2)=\dim(\mathrm{Ker}(f))+\dim(\mathrm{Im}(f)) \iff \begin{aligned}&\dim(E_1\times E_2)=\dim(E_1+E_2)+\dim(E_1\cap E_2)\\ &\dim(E_1\times E_2)=\dim(E_1)+\dim(E_2)\end{aligned}$$

Remarque : savez-vous donner une base de $E_1\times E_2$?

Exercice n° 13

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (non réduit au vecteur nul) ; soit $u\in\mathcal{L}(E)$.
On veut prouver l'équivalence : (u est une homothétie) $\iff$ ($\forall\vec{x}\in E$, $(\vec{x},u(\vec{x}))$ est une famille liée).

$\underline{\Longrightarrow}$: évident d'après la définition des homothéties.

$\underline{\Longleftarrow}$: soit $u\in\mathcal{L}(E)$ et supposons que $\forall\vec{x}\in E$, $(\vec{x},u(\vec{x}))$ est une famille liée.
Soit $\vec{x}$ un vecteur non nul de E. $(\vec{x},u(\vec{x}))$ est une famille liée donc $\vec{x}$ et $u(\vec{x})$ sont colinéaires : il existe $\lambda\in\mathbb{K}$ tel que $u(\vec{x})=\lambda\vec{x}$. Prouvons que u est l'homothétie de rapport λ. Soit $\vec{y}\in E$.

- Si $\vec{y}$ est dans $\mathrm{Vect}(\vec{x})$ alors $\vec{y}=k\vec{x}$ et $u(\vec{y})=u(k\vec{x})=ku(\vec{x})=\lambda k\vec{x}=\lambda\vec{y}$.
- Si $\vec{y}$ n'est pas dans $\mathrm{Vect}(\vec{x})$, on a : $(\vec{x}+\vec{y}\ ;\ u(\vec{x}+\vec{y}))$ qui est liée et, comme $\vec{x}+\vec{y}\neq\vec{0}$, il existe $\mu\in\mathbb{K}$ tel que $u(\vec{x}+\vec{y})=\mu(\vec{x}+\vec{y})$.
  On a : $u(\vec{y})=u(\vec{x}+\vec{y}-\vec{x})=\mu(\vec{x}+\vec{y})-\lambda\vec{x}$ et donc $u(\vec{y})-\mu\vec{y}=(\mu-\lambda)\vec{x}$.
  Le vecteur de gauche de la dernière égalité est dans $\mathrm{Vect}(\vec{y})$ et celui de droite dans $\mathrm{Vect}(\vec{x})$. Or, $\mathrm{Vect}(\vec{y})\cap\mathrm{Vect}(\vec{x})=\{\vec{0}\}$, on en déduit que $\mu=\lambda$.

Finalement, pour tout $\vec{y} \in E$ on a $u(\vec{y}) = \lambda\vec{y}$ et u est l'homothétie de E de rapport λ.

Exercice n° 14

Soit E, F, G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On veut montrer l'égalité (entre ensembles) $\text{Ker}(v \circ u) = u^{-1}\left(\text{Ker}(v) \cap \text{Im}(u)\right)$.
Procédons par double inclusion :

$\subseteq$: soit $\vec{x} \in \text{Ker}(v \circ u)$. On a $v(\ u(\vec{x})\ ) = \vec{0}_G$ donc $u(\vec{x}) \in \text{Ker}(v)$. On a aussi $u(\vec{x}) \in \text{Im}(u)$ donc $u(\vec{x}) \in \text{Ker}(v) \cap \text{Im}(u)$ et $\vec{x} \in u^{-1}\left(\text{Ker}(v) \cap \text{Im}(u)\right)$.

$\supseteq$: soit $\vec{x} \in u^{-1}\left(\text{Ker}(v) \cap \text{Im}(u)\right)$. Cela signifie que $u(\vec{x}) \in \text{Ker}(v) \cap \text{Im}(u)$ et donc $v(\ u(\vec{x})\ ) = \vec{0}_G$ d'où $\vec{x} \in \text{Ker}(v \circ u)$.

Finalement, on a bien : $\text{Ker}(v \circ u) = u^{-1}\left(\text{Ker}(v) \cap \text{Im}(u)\right)$.

4 Plus difficile...

Exercice n° 15

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les propriétés (1) à (3) sont équivalentes :

$$(1)\ :\ E = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f) \quad ; \quad (2)\ :\ \text{Im}(f) = \text{Im}(f \circ f) \quad ; \quad (3)\ :\ \text{Ker}(f) = \text{Ker}(f \circ f).$$

$(1) \Longrightarrow (2)$: supposons $E = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f)$ et prouvons que $\text{Im}(f) = \text{Im}(f \circ f)$.
On a toujours $\text{Im}(f \circ f) \subset \text{Im}(f)$, voyons l'inclusion réciproque.
Soit $\vec{y} \in \text{Im}(f)$: il existe $\vec{x} \in E$ tel que $f(\vec{x}) = \vec{y}$. Écrivons $\vec{x}$ dans la somme $E = \text{Im } f \oplus \text{Ker}(f)$: il existe $\vec{z}$ et $\vec{t}$ tels que $\vec{x} = f(\vec{z}) + \vec{t}$ et $\vec{t} = \vec{0}$. On a alors $\vec{y} = f(\vec{x}) = f(f(\vec{z}) + \vec{t}) = f \circ f(\vec{z}))$ et donc $\vec{y} \in \text{Im}(f \circ f)$.

$(2) \Longrightarrow (3)$: supposons que $\text{Im}(f) = \text{Im}(f \circ f)$ et prouvons que $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f \circ f)$.
On a toujours $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f \circ f)$. Comme $\text{Im}(f) = \text{Im}(f \circ f)$, le théorème du rang nous garantit que $\dim(\text{Ker}(f)) = \dim(\text{Ker}(f \circ f))$ et donc $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f \circ f)$.

$(3) \Longrightarrow (1)$: supposons que $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f \circ f)$ et prouvons que $E = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f)$. Le théorème du rang nous assure que si la somme $\text{Im}(f) + \text{Ker}(f)$ est directe alors ces SEV sont supplémentaires dans E.
Soit $\vec{x} \in \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$. $\vec{x} \in \text{Im}(f)$: il existe $\vec{y} \in E$ tel que $f(\vec{y}) = \vec{x}$. On a $f(\vec{x}) = \vec{0}$ donc $f(f(\vec{y})) = \vec{0}$ c'est-à-dire $\vec{y} \in \text{Ker}(f \circ f)$ donc, par hypothèse, $\vec{y} \in \text{Ker}(f)$ soit $f(\vec{y}) = \vec{0} \iff \vec{x} = \vec{0}$. Finalement, la somme $\text{Im}(f) + \text{Ker}(f)$ et donc $E = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f)$.

On a prouvé $(1) \Longrightarrow (2) \iff (3) \Longrightarrow (1)$ et donc on a $(1) \iff (2) \iff (3)$.

Exercice n° 16

Soit $n \geq 0$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ défini par $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ u(P) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$.

1. On a : $u(1) = u(X) = 0$ et $\forall i \in [\![2; n]\!],\ u(X^i) = (X+1)^i + (X-1)^i - 2X^i = \displaystyle\sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} X^{i-k}(1 + (-1)^i) - 2X^i$.
   Comme $1 + (-1)^i$, vaut 2 si k est pair et 0 si k est impair, on en déduit que $\deg(u(X^i)) = i - 2$.
2. De la question précédente on déduit $\text{Im}(u) = \text{Vect}(X^i\ ,\ i \in [\![0; n-2]\!])$ et $\text{Ker}(u) = \text{Vect}(1, X) = \mathbb{R}_1[X]$.
3. $A = \text{Vect}(X^i\ ,\ i \in [\![0; n-2]\!]) = \{Q \in \mathbb{R}_n[X]\ /\ Q(0) = Q'(0) = 0\}$ est un sous-espace de $\mathbb{R}_n[X]$ de dimension $n - 1$.
   $\dim(u(A)) = \dim(\mathbb{R}_{n-2}[X])$ donc u réalise un isomorphisme de A vers $\mathbb{R}_{n-2}[X]$.
   Il suit que que pour tout $P \in \text{Im}(u)$, il existe un unique $P \in A$ tel que $u(P) = Q$. On a donc $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $P(0) = P'(0) = 0$.

Exercice n° 17

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit u, l'endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ défini par $u(Q) = \sum_{i=0}^{n} Q^{(i)}$.
Pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, $\deg(u(X^k)) = k$ donc $\text{Im}(u) = \text{Vect}(u(X^k)\ ,\ k \in [\![0; n]\!])$ est un SEV de dimension $n + 1$ de $\mathbb{K}_n[X]$, c'est donc $\mathbb{K}_n[X]$.

Il suit que u est un automorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ et donc $\forall P \in \mathbb{K}_n[X],\ \exists! Q \in \mathbb{K}_n[X]\ /\ P = u(Q) \iff P = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} Q^{(i)}$.