Chapitre 19 - Séries numériques - Exercices

Exercice n° 1

Vrai ou faux sur l'ensemble du chapitre.
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites de complexes.

a) Changer un terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne change pas $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} u_k$.
b) Si $u_n \to 0$ alors $\sum u_n$ est convergente.
c) Une série dont le terme général est une suite non stationnaire d'entiers est divergente.
d) Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent alors $\sum(u_n + v_n)$ diverge.
e) Une série absolument divergente est divergente.
f) Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont la même nature.
g) Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ alors $\sum u_n$ converge.
h) Une série à termes positifs convergente est absolument convergente.
i) Certaines séries de Riemann divergent.
j) Supposons que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ soient réelles et que l'on ait $\forall n \in \mathbb{N}, -|u_n| \leq v_n \leq |u_n|$. Alors, la convergence de $\sum u_n$ implique celle de $\sum v_n$.
k) Si $\sum u_n$ est une série à termes positifs qui converge alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante.

1 Applications directes du cours

Exercice n° 2

Soit u une suite. Comment sont notés la série des termes de u, la $n-$ième somme partielle de cette série, la somme de la série (si elle converge) ?

Exercice n° 3

Déterminer la nature des séries suivantes :

$$\sum \cos(n) \quad ; \quad \sum \frac{1}{\ln(n)} \quad ; \quad \sum \mathrm{e}^{-n} \quad ; \quad \sum \frac{10n+3}{5n^2+n+1} \quad ; \quad \sum \frac{\sin(n)}{n^2} \quad ; \quad \sum \ln(\sin(\frac{1}{n}))$$

Exercice n° 4

Déterminer la nature des séries suivantes :

$$\sum \frac{n!}{n^n} \quad ; \quad \sum \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^3 \quad ; \quad \sum \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \quad ; \quad \sum \frac{1}{(\sqrt{n}+1)^n} \quad ; \quad \sum \frac{1}{(\ln(n))^{\ln(n)}}$$

Exercice n° 5

Déterminer la nature des séries suivantes :

$$\sum \left(1 - \cos(\frac{\pi}{n})\right) \quad ; \quad \sum \sqrt{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1} \quad ; \quad \sum \ln(\cos(\frac{1}{n})) \quad ; \quad \sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{(n^2)}$$

2 Variations autour de la série harmonique

Exercice n° 6

1. Prouver que : $\forall x > -1,\ \ln(1+x) \leq x$.
2. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ puis la divergence de $\sum \frac{1}{n}$.

Exercice n° 7

1. Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2}$.
2. En déduire (à nouveau) la divergence de $\sum \frac{1}{n}$.

Exercice n° 8

1. Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(n) \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n)$.
2. En déduire la divergence de $\sum \frac{1}{n}$ ainsi qu'un équivalent simple de ses sommes partielles.
3. On pose, pour $n \geq 1$, $\gamma_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.
   a) Etudier les variations de $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   b) Prouver que la suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain réel γ.
   c) En déduire un développement asymptotique des sommes partielles de la série harmonique.

Remarque : γ s'appelle la **constante d'Euler-Mascheroni** ; ses premières décimales sont 0,577.
Cette constante demeure relativement mystérieuse, on ne sait par exemple pas si elle est rationnelle ou non. Le calcul de ses chiffres est également compliqué du fait d'une convergence très lente. Ainsi, pour $n = 10^6$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ est une approximation de γ fausse dès la 3è décimale ! (D'autres méthodes de calcul plus efficaces existent).

Exercice n° 9

En utilisant la formule de Taylor Lagrange en $a = 0$ avec la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$, prouver que la série harmonique alternée converge vers $-\ln(2)$.

Exercice n° 10

1. Soit $k \geq 1$. Calculer $\displaystyle\int_0^1 x^{k-1}\, dx$.
2. En déduire, à nouveau, que la série harmonique alternée converge vers $-\ln(2)$.

Exercice n° 11

La série alternée $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge et sa somme vaut $-\ln(2)$.
On décide de se servir des sommes partielles de cette série pour approcher $\ln(2)$.

1. Écrire en Python, une fonction `sommePartielle(n)` qui prend en paramètre un entier naturel n non nul et renvoie $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.
2. On décide de calculer d'une autre façon. Plutôt que de prendre les termes dans l'ordre, on prend un terme d'indice impair puis deux termes d'indices impairs : $-1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \frac{1}{5} + \ldots$
   Écrire en Python, une fonction `sommePartielleV2(n)` qui prend en paramètre un entier naturel n non nul et renvoie la somme des n premiers termes calculés selon ce nouvel ordre (on aura intérêt à faire des « paquets de 3 »).
3. Quel résultat imaginez-vous pour `sommePartielle(100000)` $-$ `sommePartielleV2(100000)` ? Executez ce calcul en machine et commentez.

Cet exercice illustre la notion de famille sommable via un contre-exemple : la suite $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas sommable et changer l'ordre des termes change la somme de la série.

3 Un peu plus difficile

Exercice n° 12

Soit $\sum u_n$ une série à termes strictements positifs qui est convergente. Etudier la nature des séries suivantes :

$$\sum u_n^2 \quad ; \quad \sum \frac{u_n}{1+u_n} \quad ; \quad \sum u_n u_{2n} \quad ; \quad \sum (\mathrm{e}^{u_n}-1) \quad ; \quad \sum \frac{\sqrt{u_n}}{n}$$

Indice : pour la dernière série, on pourra écrire $\frac{\sqrt{u_n}}{n} = \sqrt{u_n} \times \sqrt{\frac{1}{n^2}}$ *puis penser aux égalités remarquables.*

Exercice n° 13

Prouver que $\sum \frac{1}{n\ln(n)}$ diverge.

Exercice n° 14

Déterminer un équivalent des sommes partielles de $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Exercice n° 15

Déterminer la nature des séries suivantes :

$$\sum n^{-(1+(1/n))} \quad ; \quad \sum \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad ; \quad \sum \frac{\ln(n)}{\ln(\mathrm{e}^n-1)} \quad ; \quad \sum n^{\ln(n)}\mathrm{e}^{-\sqrt{n}} \quad ; \quad \sum (\mathrm{ch}\sqrt{\ln(n)})^{-2}$$

Indice : les deux derniers sont plus délicats, il faut réfléchir à ce quelle expression on aimerait avoir et raisonner par majoration.

Exercice n° 16

Calculer les sommes des séries suivantes (les calculs prouveront leurs convergences) :

a) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} (n+1)3^{-n}$ *Indice : on pourra calculer les sommes partielles multipliées par* $(1-3^{-1})$.

Revoilà des fractions rationnelles :

b) $\displaystyle\sum_{n\geq 3} \frac{2n-1}{n^3-4n}$

c) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n}{n^4+n^2+1}$ *Indice : on pourra astucieusement faire apparaitre* $n+1$ *dans* n^2+n+1.

Exercice n° 17

Montrez de deux façons différentes que le nombre $2,3573737373\underline{73}\ldots$ est rationnel.

Exercice n° 18

Quelle est la valeur du nombre dont l'écriture binaire est $101,101101\underline{101}\ldots$ (où la partie soulignée est répétée à l'infini) ?

4 Plus difficile

Exercice n° 19

Soit a, b des réels strictement positifs. Etudier, selon a et b la nature de $\sum \frac{a^n 2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n}}+b^n}$.

Indice : On pourra distinguer plusieurs cas selon les valeurs prises par b.

Exercice n° 20

Etudier, selon les polynômes P et Q de $\mathbb{R}[X]$, la convergence de $\sum \frac{P(n)}{Q(n)}$.

Exercice n° 21

a) Soit a, b deux réels positifs. Prouver que $\arctan\left(\frac{a-b}{1+ab}\right) = \arctan(a) - \arctan(b)$.

b) Après avoir justifié la convergence de $\sum\limits_{n\geq 0} \arctan\left(\dfrac{1}{k^2+k+1}\right)$ et $\sum\limits_{n\geq 1} \arctan\left(\dfrac{2}{k^2}\right)$, calculer leurs sommes en se servant de la première question.

Exercice n° 22

On appelle **série de Bertrand** les séries de la forme $\sum\limits_{n\geq 2} \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ où α et β sont deux réels.

Etudier la nature des séries de Bertrand (en fonction des paramètres α et β).

Indice : on pourra faire une disjonction de cas selon les valeurs de α puis, lorsque ce sera nécessaire, de β. Au final, un seul cas est compliqué, on pourra le traiter en se ramenant à une intégrale.