Correction des exercices du chapitre 19

Exercice n° 1

a) Faux. Changer un terme ne change pas la nature de la série mais, dans le cas où $\sum u_n$ converge, cela change la valeur de la somme. Prenons un contre-exemple très simple. La série de terme général 0 converge et sa somme vaut 0. Si on modifie le premier terme en 1, la somme vaut 1.

Notez qu'écrire « $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ » n'a pas de sens si la série est divergente.

b) Faux. La série harmonique est un contre-exemple.

c) Vrai. Une suite non-stationnaire d'entiers n'est pas convergente et donc, en particulier, ne converge pas vers 0. La série est donc grossièrement divergente.

d) Faux. On prend, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1$ et $v_n = -1$. $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent mais $\sum (u_n + v_n)$ converge.

e) Faux. La série harmonique alternée est un contre-exemple.

f) Faux. C'est vrai uniquement pour les séries à termes positifs. Contre exemple : $\forall n > 0,\ u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. On a $\sum u_n$ qui diverge et $\sum v_n$ qui converge.

g) Vrai. Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ alors, à partir d'un certain rang $u_n > 0$ et donc on peut utiliser le critère de comparaison.

h) Vrai. C'est évident : si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 0$ alors $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| = u_n$.

i) Vrai. Par exemple, la série harmonique.

j) Faux. Contre exemple : la série harmonique alternée pour $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

k) Faux. Contre exemple : $\forall n > 0,\ u_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{1}{n^10} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$ est une série à termes positifs qui converge mais dont le terme général n'est pas décroissant.

1 Applications directes du cours

Exercice n° 2

— $\sum \cos(n)$ est grossièrement divergente.

— $\sum \frac{1}{\ln(n)}$ est divergente car $\forall n > 2,\ \frac{1}{n} < \frac{1}{\ln(n)}$ et $\sum \frac{1}{n}$ est divergente.

— $\sum \mathrm{e}^{-n} = \sum \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^n$ est une série géométrique convergente (car $0 < \frac{1}{\mathrm{e}} < 1$).

— $\sum \frac{10n+3}{5n^2+n+1}$ est une série à termes positifs donc on peut travailler par comparaison à un équivalent. On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{10n+3}{5n^2+n+1} \sim \frac{2}{n}$ qui est le terme général d'une série de Riemann divergente. On en déduit que $\sum \frac{10n+3}{5n^2+n+1}$ diverge.

— $\sum \ln(\sin(\frac{1}{n}))$ est grossièrement divergente car $\ln(\sin(\frac{1}{n})) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Exercice n° 3

— $\sum \frac{n!}{n^n}$ est une série à termes positifs donc on peut travailler par comparaison. On a :$\forall n \geq 2,\ \frac{n!}{n^n} = \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \leq \frac{2}{n^2}$ et $\sum \frac{2}{n^2}$ converge donc $\sum \frac{n!}{n^n}$ converge également.

— $\sum \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^3$ est grossièrement divergente.

— $\sum \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$ est une série à termes positifs donc on peut travailler par comparaison à un équivalent. On a : $\displaystyle\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln(1-\frac{1}{n^2})} \sim \mathrm{e}^{-\frac{1}{n}} \to 1$ donc la série est grossièrement divergente.

— $\sum \frac{1}{(\sqrt{n}+1)^n}$ est une série à termes positifs donc on peut travailler par comparaison. On a $\forall n \geq 3,\ 0 \leq \frac{1}{(\sqrt{n}+1)^n} \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$. $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ est une série de Riemann convergente donc $\sum \frac{1}{(\sqrt{n}+1)^n}$ converge.

— $\sum \frac{1}{(\ln(n))^{\ln(n)}}$ est une série à termes positifs donc on peut travailler par comparaison.
On a : $\frac{1}{(\ln(n))^{\ln(n)}} = \mathrm{e}^{\ln(n)\ln(\ln(n))}$.
Il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ à partir duquel on a $\ln(\ln(n)) \geq 2$ et alors, $n \geq N \Longrightarrow (\ln(n))^{\ln(n)} \geq n^2$ autrement dit : $n \geq N \Longrightarrow \frac{1}{(\ln(n))^{\ln(n)}} \leq \frac{1}{n^2}$. On en déduit que $\sum \frac{1}{(\ln(n))^{\ln(n)}}$ converge.

Exercice n° 4

— $\sum \left(1-\cos(\frac{\pi}{n})\right)$ est une série à termes positifs donc on peut travailler par comparaison à un équivalent.
$1-\cos(\frac{\pi}{n}) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{\pi^2}{n^2} + o((\frac{1}{n^2})$ donc $\sum \left(1-\cos(\frac{\pi}{n})\right)$ converge.

— $\sum \sqrt{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1}$ est une série à termes positifs donc on peut travailler par comparaison à un équivalent.
On a $\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1 \underset{x\to+\infty}{=} \dfrac{1}{n} + o(\dfrac{1}{n})$ et $\sqrt{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ qui est le terme général d'une série divergente. On en déduit que $\sum \sqrt{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1}$ diverge.

— $\forall n \geq 1,\ \cos(\frac{1}{n}) \in]0;1[$ donc $\sum \ln(\cos(\frac{1}{n}))$ est une série à termes négatifs, on peut donc travailler par comparaison à un équivalent.
On a : $\cos(\frac{1}{n}) \underset{x\to+\infty}{=} 1-\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})$ et donc $\ln\left(\cos(\frac{1}{n})\right) \underset{x\to+\infty}{=} -\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2}) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$ qui est le terme général d'une série convergente. On en déduit que $\sum \ln(\cos(\frac{1}{n}))$ converge.

— $\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{(n^2)}$ est une série à termes positifs donc on peut travailler par comparaison à un équivalent. On a $\forall n > 0$:
$\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{(n^2)} = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{-n^2} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n^2} = \mathrm{e}^{-n^2\ln(1+\frac{1}{n})} \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{-n^2(\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}+o(\frac{1}{n^2}))} \underset{x\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-n}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$ qui est le terme général d'une série convergente. On en déduit que $\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{(n^2)}$ converge.

2 Variations autour de la série harmonique

Exercice n° 5

1. Version 1 avec la convexité. La fonction $\ln(1+x)$ est concave et donc sa courbe est au-dessous de ses tangentes, en particulier en dessous de $y = x$.
Version 2 (hyper classique) en faisant une étude de fonction. On prouve que la fonction $f(x) = x-\ln(1+x)$, definie et dérivable sur $]-1;+\infty[$ admet pour minimum 0 et que ce minimum est atteint en 0.
On a donc : $\forall x > -1,\ f(x) \geq 0 \Longleftrightarrow \ln(1+x) \leq x$.
2. Soit un entier naturel n non nul. En utilisant la question 1. on a :
$$\forall k \in [\![1;n]\!],\ \ln(1+\frac{1}{k}) \ \leq\ \frac{1}{k}$$
On somme ces inégalités :
$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \ \leq\ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$
O, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1)-\ln(k) = \ln(n+1) \to +\infty$. On en déduit que $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

Exercice n° 6

1. On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k} \ \leq\ \sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{n} = \frac{1}{2}$.
2. Si $\sum \frac{1}{n}$ convergeait, la suite des restes partiels tendrait vers 0, ce qui est impossible en vertu de l'inégalité prouvée à la question précédente.

Exercice n° 7

1. On a : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{k+1} \leq \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x \leq \frac{1}{k}$ (puisque $x \mapsto \frac{1}{x}$ est positive et décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$).

   On somme ces inégalités pour $k \in [\![1; n-1]\!]$ (avec $n > 0$) : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \ \leq\ \ln(n)\ \leq\ \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$: $(\star)$. On note H_n la $n-$ième somme partielle de la série harmonique et $(\star)$ devient : $H_n - 1 \leq \ln(n) \leq H_n - \frac{1}{n}$.

   On en déduit : $\forall n \geq 1,\ \ln(n) \leq H_n \leq \ln(n) + 1$.

2. On a : $\forall n \geq 1,\ \ln(n) \leq H_n \leq \ln(n)+1$. Le théorème des gendarmes s'applique et on obtient $H_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Pour $n > 1$ en divisant les inégalités par $\ln(n)$ puis en passant à la limite on a $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

3. a) $\forall n > 1,\ \gamma_{n+1} - \gamma_n = \frac{1}{n} - \ln(n) + \ln(n-1) = \frac{1}{n} - \ln(1 - \frac{1}{n}) \leq 0$ (car ln est concave). $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.

   b) On a vu que $\forall n \geq 1,\ \ln(n) \leq H_n$ soit $\forall n \geq 1,\ 0 \leq \gamma_n$. La suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, on en déduit qu'elle converge.

   c) Soit $\gamma = \lim_n \gamma_n$. On a $\gamma_n \underset{n\to+\infty}{=} \gamma + o(1)$ et donc $H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n + \gamma + o(1)$.

Exercice n° 8

La fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1;+\infty[$. On peut donc lui appliquer l'inégalité de Taylor Lagrange en $a = 0$: pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x > -1$ on a :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}}{k!}(0)x^k \right| \ \leq\ \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}M \ \ : (\star)$$

où M est un majorant de $f^{(n+1)}$ entre 0 et x. Calculons les dérivées successives de f :

$$\forall x > -1,\ f'(x) = (1+x)^{-1}\ ;\ f''(x) = -(1+x)^{-2}\ ;\ldots;\ f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!(1+x)^{-k}$$

$(\star)$ devient : $\left| f(x) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \right| \ \leq\ \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}M$ et, pour $x = 1$: $\left| \ln(2) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} \right| \ \leq\ \dfrac{1}{(n+1)!}M.$

Il reste à trouver un majorant de $|f^{(n+1)}(x)|$ sur $[0;1]$. On a : $\forall x \in [0;1],\ |f^{(n+1)}(x)| = n!(1+x)^{-n-1} \leq n!$.
Finalement :

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} \ - (-\ln(2)) \right| \ \leq\ \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Exercice n° 9

1. On a :$\forall k \geq 1,\ \displaystyle\int_0^1 x^{k-1}\ \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{k}x^k\right]_0^1 = \frac{1}{k}$.

2. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \int_0^1 x^{k-1}\ \mathrm{d}x \\
&= -\sum_{k=1}^{n} \int_0^1 (-x)^{k-1}\ \mathrm{d}x \\
&= -\int_0^1 \sum_{k=1}^{n} (-x)^{k-1}\ \mathrm{d}x \\
&= -\int_0^1 \frac{1-(-x)^n}{1+x}\ \mathrm{d}x \\
&= -\underbrace{\int_0^1 \frac{1}{1+x}\ \mathrm{d}x}_{=\ \ln(2)} + \underbrace{\int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x}\ \mathrm{d}x}_{\to\ 0}
\end{aligned}$$

   Finalement, la série harmonique alternée converge vers $-\ln(2)$.

3 Un peu plus difficile

Exercice n° 10

— $\sum u_n$ converge donc $u_n \to 0$ et, en particulier, à partir d'un certain rang N on a $0 \leq u_n \leq 1$ d'où $0 \leq u_n^2 \leq u_n$ ce qui garantit que $\sum u_n^2$ converge.

— $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 0$ donc $0 \leq \dfrac{u_n}{u_n+1} \leq u_n$ ce qui garantit que $\sum \frac{u_n}{u_n+1}$ converge.

— $(u_n)_n$ est une suite positive qui converge vers 0 donc :

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Longrightarrow 0 \leq u_{2n} \leq 1$$

ce qui entraîne : $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Longrightarrow 0 \leq u_{2n} u_n \leq u_n$ donc $\sum u_n u_{2n}$ converge.

— $\sum u_n$ converge donc $u_n \to 0$ et on a $\mathrm{e}^{u_n} - 1 \underset{n\to+\infty}{=} 1 + u_n + o(u_n) - 1 \underset{n\to+\infty}{=} u_n + o(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$. Par comparaison de séries à termes positifs, on déduit que $\sum(\mathrm{e}^{u_n} - 1)$ converge.

— $\forall n \geq 1,\ \left(\sqrt{u_n} - \sqrt{\dfrac{1}{n^2}}\right)^2 \geq 0 \iff \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{1}{n^2}\right) \geq \dfrac{\sqrt{u_n}}{n}$.
La convergence de $\sum u_n$ et de $\sum \frac{1}{n^2}$ nous permet de déduire celle de $\sum \frac{\sqrt{u_n}}{n}$.

Exercice n° 11

On a : $\forall k \geq 3,\ \dfrac{1}{k\ln(k)} \geq \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln(x)} \iff \dfrac{1}{k\ln(k)} \geq \ln(\ln(k)) - \ln(\ln(k-1))$. Il suit :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \ \geq\ \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \ \geq\ \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2))$$

On en déduit que $\sum \frac{1}{n\ln n}$ diverge vers $+\infty$.

Exercice n° 12

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons S_n la somme partielle d'indice n de $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$.

$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. On a donc : $\forall k \geq 1,\ \dfrac{1}{\sqrt{k}} \geq \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \geq \frac{1}{\sqrt{k+1}}$.

En sommant pour $k \in [\![1; n-1]\!]$ on obtient : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \int_1^n \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \geq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$. Autrement dit :

$$S_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \geq 2\sqrt{n} - 1 \geq S_n - 1 \iff S_n + 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \geq 2\sqrt{n} - 1 \geq S_n$$

Ce qui implique : $2\sqrt{n} - 2 \leq S_n \leq 2\sqrt{n} - 1$ et donc $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$.

Exercice n° 13

— On a : $\forall n > 0,\ n^{-(1+(1/n))} = \mathrm{e}^{-(1+\frac{1}{n})\ln(n)} = \mathrm{e}^{-\ln(n)}\mathrm{e}^{-\frac{\ln(n)}{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.
Par équivalence sur les séries à termes positifs, $\sum n^{-(1+(1/n))}$ diverge.

— On a : $\forall n > 0,\ \dfrac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}} + o(\dfrac{1}{\sqrt{n}})\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.
Par équivalence sur les séries à termes positifs, $\sum \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ diverge.

— On a : $\forall n > 0,\ \dfrac{\ln(n)}{\ln(\mathrm{e}^n - 1)} \geq \dfrac{\ln(n)}{\ln(\mathrm{e}^n)} = \dfrac{\ln(n)}{n} \geq \dfrac{1}{n}$.
On en déduit que $\sum \frac{\ln(n)}{\ln(\mathrm{e}^n - 1)}$ diverge.

— On a : $\forall n \geq 1,\ n^{\ln(n)}\mathrm{e}^{-\sqrt{n}} = \mathrm{e}^{\ln(n)^2-\sqrt{n}}$. Or, $\ln(n)^2 \underset{n\to+\infty}{=} o(\sqrt{n})$ et $\ln(n) \underset{n\to+\infty}{=} o(\sqrt{n})$ donc il existe un rang N à partir duquel on a $\ln(n) - \sqrt{n} \leq -2\ln(n)$ et alors :

$$\mathrm{e}^{\ln(n)^2-\sqrt{n}} \leq \mathrm{e}^{-2\ln(n)} = \frac{1}{n^2}$$

Par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que $\sum n^{\ln n}\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$ converge.

— $\forall n > 0,\ (\mathrm{ch}\sqrt{\ln(n)})^{-2} = \dfrac{4}{\left(\mathrm{e}^{\sqrt{\ln(n)}} + \mathrm{e}^{-\sqrt{\ln(n)}}\right)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{4}{\mathrm{e}^{2\sqrt{\ln(n)}}}$.

Pour n assez grand, on a $\ln(\sqrt{n}) = \frac{1}{2}\ln(n) \geq \sqrt{\ln(n)}$ d'où $\dfrac{4}{\mathrm{e}^{2\sqrt{\ln(n)}}} \geq \dfrac{4}{n}$ qui est le terme général d'une série divergente.
On en déduit, par comparaison de séries à termes positifs, que $\sum(\mathrm{ch}\sqrt{\ln n})^{-2}$ diverge.

Exercice n° 14

a) On a, $\forall n \geq 0$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(k+1)3^{-k} \times (1-3^{-1}) &= \sum_{k=0}^{n}(k+1)3^{-k} \ - \ \sum_{k=0}^{n}(k+1)3^{-(k+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{n}(k+1)3^{-k} \ + \ \sum_{k=0}^{n}3^{-k} \ - \ \sum_{k=0}^{n}k3^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n}3^{-k} - (n+1)3^{-(n+1)}\end{aligned}$$

Or, $\sum_{k=0}^{n}3^{-k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-1/3} = \frac{3}{2}$ et $(n+1)3^{-(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\sum_{k=0}^{n}(k+1)3^{-k} \times (1-3^{-1}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{2}$.

On en déduit $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+1)3^{-k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{9}{4}$

b) On a, $\forall n \geq 3$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=3}^{n}\frac{2k-1}{k^3-4k} &= \sum_{k=3}^{n}\frac{\frac{1}{4}}{k} + \frac{\frac{3}{8}}{k-2} + \frac{\frac{-5}{8}}{k+2} \\ &= \frac{1}{8}\left(\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} \ + \ 3\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{k} \ - \ 5\sum_{k=5}^{n+2}\frac{1}{k}\right) \\ &= \frac{1}{8}\left(\frac{2}{3} + \frac{2}{4} + 3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{3} + \frac{3}{4} - \frac{3}{n-1} - \frac{3}{n} - \frac{5}{n+1} - \frac{5}{n+2}\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{89}{12}\end{aligned}$$

c) On a, $X^4 + X^2 + 1 = (X^2+1)^2 - X^2 = (X^2+X+1)(X^2-X+1)$ d'où $\forall n \geq 0$:

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{k^4+k^2+1} \ = \ \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k^2-k+1} \ - \ \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k^2+k+1}\right)$$

Or, $\forall k \in [\![0;n]\!],\ k^2+k+1 = (k+1)^2 - (k+1) + 1$ d'où :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{k^4+k^2+1} \ &= \ \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k^2-k+1} \ - \ \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)^2-(k+1)+1}\right) \\ &= \ \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k^2-k+1} \ - \ \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k^2-k+1}\right) \\ &= \ \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2-(n+1)+1}\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\sum_{n\geq 0}\frac{n}{n^4+n^2+1}$$

Exercice n° 15

soit $x = 2,357373737373\dots$.

- Version 1 : on a $100x - x = 235,73737373 - 2,3573737373 = 233,38$ et donc $x = \frac{233,38}{99} = \frac{23338}{9900}$ est rationnel.
- Version 2 : $x = 2,35 + 73(10^{-4} + 10^{-6} + \dots) = 2,35 + 73\sum_{k=2}^{+\infty} 10^{-2k} = 2,35 + 73\sum_{k=2}^{+\infty}(10^{-2})^k$.

  La somme $\sum_{k=2}^{+\infty}(10^{-2})^k$ est géométrique, calculons-là en retrouvant notre formule de référence :

$$\sum_{k=2}^{+\infty}(10^{-2})^k = \left(\sum_{k=0}^{+\infty}(10^{-2})^k\right) - 1 - 10^{-2} = \frac{1}{1-10^{-2}} - 1 - 10^{-2} = \frac{100}{99} - 1 - \frac{1}{100} = \frac{1}{9900}$$

  On en déduit $x = 2,35 + \dfrac{73}{9900} = \dfrac{239\times 99 + 73}{9900}$.

Exercice n° 16

Soit $x = 101,101101\underline{101}\dots_2$. On a :

$$\begin{aligned}
x &= 2^2 + 2^0 + 2^{-1} + 2^{-3} + 2^{-4} + 2^{-6} + 2^{-7} + \dots \\
&= 5 + \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-1-3k} + \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-3-3k} \\
&= 5 + (2^{-1} + 2^{-3})\sum_{k=0}^{+\infty}(2^{-3})^k \\
&= 5 + (\frac{1}{2} + \frac{1}{8})\frac{1}{1-\frac{1}{8}} \\
&= 5 + \frac{5}{8}\times\frac{8}{7} \\
&= \frac{40}{7}
\end{aligned}$$

4 Plus difficile

Exercice n° 17

Soit a, b des réels strictement positifs. $\sum \frac{a^n 2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n}}+b^n}$ est à termes positifs, on peut donc travailler par comparaison.

— Si $b > 1$: $\dfrac{a^n 2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n}}+b^n} \underset{n\to\infty}{\sim} \left(\dfrac{a}{b}\right)^n 2^{\sqrt{n}} = \mathrm{e}^{n(\ln(\frac{a}{b}) + \frac{\ln(2)}{\sqrt{n}})}$.
  Comme $\frac{\ln(2)}{\sqrt{n}} \to 0$, la série converge si, et seulement si, $\ln(\frac{a}{b}) < 0$ c'est-à-dire si, et seulement si, $a < b$.

— Si $b \leq 1$: $2^{\sqrt{n}} + b^n \underset{n\to\infty}{\sim} 2^{\sqrt{n}}$ et $\dfrac{a^n 2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n}}+b^n} \underset{n\to\infty}{\sim} a^n$. On en déduit que la série converge alors si, et seulement si, $a < 1$.

Exercice n° 18

Supposons que P et Q sont non nuls. À partir d'un certain rang, $(P(n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Q(n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont non-nuls et de signe constant, donc $(\frac{P(n)}{Q(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est bien défini et de signe constant, on peut donc travailler par comparaison à un équivalent.
Notons a et b les coefficients dominants de P et Q ; ce sont des réels non nuls.
On a : $\dfrac{P(n)}{Q(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{a}{b} n^{\deg(P)-\deg(Q)}$ qui est le terme général d'une série de Riemann qui converge si, et seulement si, $\deg(P) - \deg(Q) < -1 \Longleftrightarrow \deg(Q) \geq \deg(P) + 2$.

Exercice n° 19

a) En utilisant la formule $\tan(x-y) = \frac{\tan(x)-\tan(y)}{1+\tan(x)\tan(y)}$ on obtient que $\arctan\left(\frac{a-b}{1+ab}\right) = \arctan(a) - \arctan(b)$.
(On pourra noter que la condition de positivité de a et b garantit que tous les termes sont bien définis).

b) — $\forall k \in \mathbb{N},\ \frac{1}{k^2+k+1} = \frac{(k+1)-k}{k^2+k+1}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, :

$$\sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) = \sum_{k=0}^{n} \arctan(k+1) - \arctan(k) = \arctan(n+1) - \arctan(0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$$

— $\forall k \geq 1,\ \frac{1}{k^2} = \frac{(k+1)-(k-1)}{1-(k+1)(k-1)}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{2}{k^2}\right) &= \sum_{k=1}^{n} \arctan(k+1) - \arctan(k-1)\\ &= \arctan(n+1) + \arctan(n) - \arctan(1) - \arctan(0)\\ &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{3\pi}{4}\end{aligned}$$

Après avoir justifié la convergence de $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right)$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \arctan\left(\frac{2}{k^2}\right)$, calculer leurs sommes en se servant de la première question.

Exercice n° 20

— Si $\alpha < 1$: à partir d'un certain rang, $\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} > \frac{1}{n}$ et la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$ diverge.

— Si $\alpha > 1$: soit $1 < \gamma < \alpha$. À partir d'un certain rang, on a $0 < \frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta} \frac{1}{n^\gamma}$ et $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$ converge.

— Si $\alpha = 1$:
- Si $\beta = 1$: on a déjà vu dans un exercice précédent que $\sum \frac{1}{n\ln(n)}$ diverge.
- Si $\beta < 1$: on a $\frac{1}{n\ln(n)^\beta} > \frac{1}{n\ln(n)}$ et donc la série diverge.
- Si $\beta > 1$: la série est de la même nature que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_2^n \frac{1}{x\ln(x)^\beta}\,\mathrm{d}x$. En faisant le changement de variable $\varphi(t) = \mathrm{e}^t$ on obtient la convergence de la série.