Chapitre 20 - Matrices et Applications Linéaires - Exercices

Exercice n° 1

Vrai ou faux sur l'ensemble du chapitre.

E et F désignent des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies (non nulles) n et p ; u est un élément de $\mathcal{L}(E, F)$. $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ désignent des bases de E et F .

- $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
- Si u est un isomorphisme alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u)$ est carrée.
- Si v est un endomorphisme surjectif de E alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(v)$ est inversible.
- Si v est un endomorphisme de E qui n'est pas injectif, alors il existe une base de E dans laquelle la matrice de v a au moins une colonne nulle.
- Une matrice de passage est inversible.
- Une matrice inversible est une matrice de passage.
- Toutes les matrices de $\mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$ ont le même rang.
- Toute matrice carrée inversible est semblable à l'identité.
- Si v est un automorphisme de E alors $v \circ v$ aussi.
- Un système ayant une unique solution est de Cramer.

1 Applications directes du cours

Exercice n° 2

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ et u l'application linéaire canoniquement associée à M .

- Entre quels espaces opère u ?
- Déterminer $\text{Ker}(M)$. En déduire $\text{rg}(M)$ puis déterminer une base de $\text{Im}(M)$.

Exercice n° 3

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par $f((x; y; z)) = (2x + y + 3z; x - y; 6x - 3y + 3z)$.
(On ne demande pas de prouver que f est linéaire mais vous pouvez le vérifier).

- Donner la matrice M de f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
- Déterminer une base de $\text{Im}(M)$. En déduire $\dim(\text{Ker}(M))$.

Exercice n° 4

Soit f , l'endomorphisme de $\mathbb{K}_3[X]$ défini pour tout $P \in \mathbb{K}_3[X]$ par $f(P) = P - XP'$.

- Déterminer la matrice de f relativement à la base canonique de $\mathbb{K}_3[X]$.
- Déterminer le rang de f puis une base de $\text{Im}(f)$.

Exercice n° 5

On travaille dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Déterminer la matrice de l'homothétie vectorielle de rapport λ relativement à la base $(\vec{i}; \vec{j})$.
- Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer la matrice de la rotation vectorielle d'angle θ relativement à la base $(\vec{i}; \vec{j})$.

Exercice n° 6

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

- Déterminer $f(X^2 + 3X - 5)$ puis $f(aX^2 + bX + c)$.
- Après avoir justifié que f est un isomorphisme, déterminer f^{-1} .
- Après avoir justifié que $\mathcal{B} = (1 - X^2, X + X^2, 1 + X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$, déterminer la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}$.

Exercice n° 7

On travaille dans le plan muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$.
Soit f la projection sur l'axe des abscisses $\text{Vect}(\vec{i})$ parallèlement à $\text{Vect}(\vec{i} + \vec{j})$.

1. Déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f)$.
2. Soit $\mathcal{B}' = (\vec{i} - \vec{j}, -2\vec{i} + 3\vec{j})$. Après avoir justifié que $\mathcal{B}'$ est une autre base du plan, déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(f)$.
3. Déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}'}(f)$.
4. Reprendre les questions précédentes en faisant apparaître les matrices de passage.

Exercice n° 8

Soit h l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par rapport à deux bases $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et $\mathcal{F} = (\vec{f}_1, \vec{f}_2)$ par la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère : $\vec{e}'_1 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{e}'_2 = \vec{e}_3 + \vec{e}_1$, $\vec{e}'_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$.
Justifier que $\mathcal{E}' = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice de h relativement aux bases $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{F}$.
3. Après avoir justifié que la famille $\mathcal{F}' = (\frac{1}{2}(\vec{f}_1 + \vec{f}_2), \frac{1}{2}(\vec{f}_1 - \vec{f}_2))$ est une base de $\mathbb{R}^2$, donner $\text{Mat}_{\mathcal{E}', \mathcal{F}'}(h)$.
4. Reprendre les questions précédentes en faisant apparaître les matrices de passage

Exercice n° 9

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer le noyau, l'image et le rang de A .

2 Un peu plus dur

Exercice n° 10

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On travaille dans $\mathbb{C}$ considéré comme $\mathbb{R}$ - espace vectoriel et muni de la base $\mathcal{E} = \{1, i\}$.
On considère l'application $f_\theta : z \mapsto e^{i\theta} \bar{z}$.

1. Montrer que f_θ est $\mathbb{R}$ -linéaire.
2. Déterminer $A = \text{Mat}_{\mathcal{E}}(f_\theta)$.
3. Calculer A^2 . En déduire l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}$ dans laquelle la matrice de f_θ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
4. Trouver une telle base $\mathcal{B}$.

Exercice n° 11

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $u_{\alpha, \beta}$ l'application linéaire canoniquement associée à la matrice : $M_{\alpha, \beta} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \alpha & \beta \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Existe-t-il des valeurs de α et de β telles que $u_{\alpha, \beta}$ soit injective ? surjective ?

Exercice n° 12

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A .

1. Prouver que f est un projecteur de $\mathbb{R}^3$.
2. En déduire que A est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ou à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Préciser à laquelle, qu'on désigne ensuite par B .
3. Trouver une matrice $P \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

3 Démontrer les résultats du cours et exercices théoriques

Exercice n° 13

Soit u un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Démontrer que si u est un projecteur alors il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale avec uniquement des 0 et des 1 sur la diagonale.
2. La réciproque est-elle vraie ?
3. Peut-on trouver un résultat similaire pour les symétries ? Les homothéties ?

Exercice n° 14

Démontrer que deux matrices carrées semblables ont la même trace.

Exercice n° 15

Soit E un espace à n dimensions et f un endomorphisme de E .

1. Montrer que la condition $f^2 = 0$ est équivalente à $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$. Quelle condition vérifie alors le rang de f ? On suppose dans le reste de l'exercice que $f \circ f = 0$.
2. Soit E_1 un supplémentaire de $\text{Ker}(f)$ dans E et soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_r)$ une base de E_1 . Montrer que la famille des vecteurs $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_r, f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_r))$ est libre. Montrer comment on peut la compléter, si nécessaire, par des vecteurs de $\text{ker } f$ de façon à obtenir une base de E . Quelle est la matrice de f dans cette base ?
3. Sous quelle condition nécessaire et suffisante a-t-on $\text{Im } f = \text{ker } f$?

4. Exemple : Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Montrer que $f^2 = 0$. Déterminer une nouvelle base dans laquelle la matrice de f a la forme indiquée dans la question 2).

4 Plus difficile

Exercice n° 16

Déterminer un endomorphisme f de $\mathbb{K}_2[X]$ tel que $f \neq 0$, $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$.

Exercice n° 17

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que u est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et déterminer u^{-1} .
2. Déterminer des vecteurs $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$ tels que :

$$u(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 \quad ; \quad u(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \quad ; \quad u(\vec{e}_3) = \vec{e}_2 + \vec{e}_3$$

3. Justifier que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Déterminer P la matrice de passage de la base canonique à $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ainsi que P^{-1} .
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $\text{Mat}_{\text{can}}(u^n)$.

Exercice n° 18

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

Soit $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

1. Justifier que $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ puis déterminer $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
2. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

3. Déterminer l'ensemble des suites réelles qui vérifient $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + \frac{2}{3}y_n \\ y_{n+1} = -\frac{5}{2}x_n - \frac{2}{3}y_n \end{cases}$.