Correction des exercices du chapitre 20

Exercice n° 1

a) Faux. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$ est une matrice à p lignes et n colonnes.

b) Vrai. Si u est un isomorphisme alors E et F ont même dimension et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}$ est carrée.

c) Vrai. Si v est un endomophisme surjectif de E alors v est un isomorphisme de E et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(v)$ est inversible.

d) Vrai. Si v est un endomorphisme de E qui n'est pas injectif, alors il existe $\vec{x} \neq \vec{0}$ tel que $v(\vec{x}) = \vec{0}$. On complète $(\vec{x})$ en une base de E. Dans cette base, la matrice de u a sa première colonne qui est nulle.

e) Vrai. Une matrice de passage est une matrice qui représente l'identité (de $\mathbb{K}^n$) qui est un un automorphisme.

f) Vrai. Une matrice M inversible a ses colonnes qui forment une base de $\mathbb{K}^n$, notons-la $\mathcal{B}$.
On peut voir M comme $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\ \mathrm{can}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{K}^n})$, c'est à dire comme la matrice de passage $\mathrm{P}_{\mathrm{can}}^{\mathcal{B}}$.

g) Vrai. Toutes matrice de $\mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$ représente un isomorphisme de $\mathbb{K}^n$ et a pour rang n.

h) Faux. I_n commute avec toute les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et donc n'est semblable qu'à elle-même.

i) Vrai. On l'a déjà vu dans le chapitre sur les applications linéaires. D'un point de vue matriciel, cela correspond à dire que, si $M \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$ alors $M^2 \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$.

j) Faux. Le système $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$ a une unique solution mais n'est pas un système carré, donc ce n'est pas un système de Cramer. (Pour mémoire un système de Cramer est un système $AX = B$ avec $A \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$, il a alors une unique solution quelle que soit le second membre B).

1 Applications directes du cours

Exercice n° 2

1. $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^3, \mathbb{K}^2)$.
2. Déterminer le noyau de M c'est résoudre un système linéaire homogène dont la matrice est M :

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(u) \iff \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 5 & 2 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \iff \begin{cases} x - y + z = 0\\ 5x + 2y - 4z = 0\end{cases}$$

On procède par opérations sur les lignes :

$$M \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 7 & -9\end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -\frac{9}{7}\end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{2}{7}\\ 0 & 1 & -\frac{9}{7}\end{pmatrix} \qquad (L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1\ ;\ L_2 \leftarrow \frac{1}{7}L_2 \text{ puis } L_1 \leftarrow L_1 + L_2)$$

On en déduit que les vecteurs de $\mathrm{Ker}(u)$ sont de la forme $z\begin{pmatrix}2/7\\ 9/7\\ 1\end{pmatrix}$ c'est-à-dire que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}2\\ 9\\ 7\end{pmatrix}\right)$.

On applique le théorème du rang : $3 = 1 + \mathrm{rg}(M)$ et donc $\mathrm{rg}(M) = 2$.
$\mathrm{Im}(M)$ est un sous-espace de $\mathbb{K}^2$ de dimension 2, c'est donc $\mathbb{K}^2$ et toute base de $\mathbb{K}^2$ est une base de $\mathrm{Im}(u)$.
Il y en a deux qui sont « naturelles » : la base canonique et $\left(\begin{pmatrix}1\\ 5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\ 5\end{pmatrix}\right)$.

Exercice n° 3

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par $f((x\ ;\ y\ ;\ z)) = (2x + y + 3z\ ;\ x - y\ ;\ 6x - 3y + 3z)$.

1. $M = \begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 0\\ 6 & -3 & 3\end{pmatrix}$.
2. La famille $\left(\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 6\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\ -1\\ -3\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}3\\ 0\\ 3\end{pmatrix}\right)$ est génératrice de $\mathrm{Im}(M)$; autrement dit : les colonnes de M génèrent $\mathrm{Im}(M)$. On procède par opérations sur les colonnes (ce qui correspond à faire des combinaisons linéaires sur les colonnes et donc conserve leur espace engendré) :

$$M \underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \\ 12 & -3 & 12 \end{pmatrix} \underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 12 & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad (C_1 \leftarrow C_1 - 2C2 \text{ et } C_3 \leftarrow C_3 + 3C2 \text{ puis } C_3 \leftarrow C_3 - C_2)$$

On en déduit que : $\mathrm{Im}(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}\right)$. Cette dernière famille, étant libre puisque ce sont deux vecteurs qui ne sont pas colinéaires, est une base de $\mathrm{Im}(M)$.

Le théorème du rang s'applique : $3 = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + 2 \Longleftrightarrow \dim(\mathrm{Ker}(f) = 1$.

Exercice n° 4

1. On a : $f(1) = 1,\ f(X) = 0,\ f(X^2) = -X^2$ et $f(X^3) = -2X^2$ d'où $\mathrm{Mat}_{can}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.
2. Cette matrice est diagonale, son rang est 3 et une une base de $\mathrm{Im}(f)$ est $(1 \ ;\ X^2 \ ;\ X^3)$.

Exercice n° 5

1. La matrice de l'homothétie vectorielle de rapport $\lambda \in \mathbb{R}^*$ relativement à toute base du plan est λI_2.
2. Il faut faire une figure pour bien comprendre.
La rotation vectorielle d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ envoie $\vec{i}$ sur $r_\theta(\vec{i}) = \cos(\theta)\vec{i}+\sin(\theta)\vec{j}$ et $\vec{j}$ sur $r_\theta(\vec{j}) = -\sin(\theta)\vec{i}+\cos(\theta)\vec{j}$.
La matrice de r_θ dans la base orthonormée $(\vec{i};\vec{j})$ est donc $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

Exercice n° 6

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

1. $f(X^2 + 3X - 5)$ est le polynôme dont la colonne dans la base canonique est $A\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}$, c'est à dire $-17 + 6X - 5X^2$.
On procède de la même façon et on obtient $f(aX^2 + bX + c) = (3c - b + a) + 2bX + (c - b + 3a)X^2$.
2. f est un isomorphisme si, et seulement si, A est inversible. Déterminons son rang par opérations :
$$A \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} I_3$$
Le rang de A est donc 3 et f est un isomorphisme de $\mathbb{K}_2[X]$.
Son isomorphisme réciproque f^{-1} a pour matrice dans la base canonique A^{-1}.
Après calculs, on a $A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
3. On vérifie facilement que la famille $\mathcal{B} = (1 - X^2, X + X^2, 1 + X^2)$ est génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$, comme elle comporte 3 polynômes, c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
La matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}$ est la matrice dont les colonnes sont les images des vecteurs de $\mathcal{B}$ exprimés dans $\mathcal{B}$.
Après calculs, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Remarque : l'année prochaine, vous verrez comment trouver une base dans laquelle se diagonalise f (comme le permet $\mathcal{B}$ dans cet exercice). Vous parlerez de valeurs propres, d'espaces propres...

Exercice n° 7

1. On a $f(\vec{i}) = \vec{i}$ et $f(\vec{j}) = f((\vec{i}+\vec{j})-\vec{i}) = -\vec{i}$ donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. $\mathcal{B}' = (\vec{i}-\vec{j}, -2\vec{i}+3\vec{j})$ est une famille libre de deux vecteurs du plan, c'en est donc une base. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)$ a pour colonnes $f(\vec{i}-\vec{j})$ et $f(-2\vec{i}+3\vec{j})$ exprimés dans $\mathcal{B}$.
   On a $f(\vec{i}-\vec{j}) = 2\vec{i}$ et $f(-2\vec{i}+3\vec{j}) - 5\vec{i}$ donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f)$ a pour colonnes $f(\vec{i}-\vec{j})$ et $f(-2\vec{i}+3\vec{j})$ exprimés dans $\mathcal{B}'$.
   On a $f(\vec{i}-\vec{j}) = 2\vec{i} = 6(\vec{i}\vec{j}) + 2(-2\vec{i}+3\vec{j})$ et $f(-2\vec{i}+3\vec{j}) - 5\vec{i} = -15(\vec{i}\vec{j}) + 5(-2\vec{i}+3\vec{j})$.
   On en déduit : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 6 & -15 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$.
4. On a $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f) = \left(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\right)^{-1} \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}}_{=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)}$.

Exercice n° 8

1. On a $\vec{e}_1 = \frac{1}{2}(\vec{e'}_2+\vec{e'}_3-\vec{e'}_1)$, $\vec{e}_2 = \frac{1}{2}(\vec{e'}_1+\vec{e'}_3-\vec{e'}_2)$ et $\vec{e}_3 = \frac{1}{2}(\vec{e'}_1+\vec{e'}_2-\vec{e'}_3)$ donc la famille $(\vec{e'}_1\ ;\ \vec{e'}_2\ ;\ \vec{e'}_3)$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$. Comme son cardinal est $\dim(\mathbb{R}^3)$, on en déduit que c'est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Les colonnes de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{F}}(h)$ sont $h(\vec{e'}_1)$, $h(\vec{e'}_2)$ et $h(\vec{e'}_3)$ exprimés dans $\mathcal{F}$.
   On a $h(\vec{e'}_1) = h(\vec{e}_2+\vec{e}_3) = h(\vec{e}_2)+h(\vec{e}_3)$. Or, $h(\vec{e}_2)$ et $h(\vec{e}_3)$ exprimés dans $\mathcal{F}$ sont les 2è et 3è colonnes de A. La première colonne de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{F}}(h)$ est donc $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.
   On procède de façon analogue pour les 2è et 3è colonne, on obtient : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{F}}(h) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.
3. La famille $(\vec{f_1}\ ;\ \vec{f_2})$ est libre donc la famille $\mathcal{F}' = (\frac{1}{2}(\vec{f_1}+\vec{f_2}), \frac{1}{2}(\vec{f_1}-\vec{f_2}))$ l'est aussi. Puisqu'elle a pour cardinal $2 = \dim(\mathbb{R}^2)$, c'est bien une base de $\mathbb{R}^2$.
   Pour $i \in [\![1;3]\!]$, la i–è colonne de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{F}'}(h)$ correspond au vecteur $h(\vec{e'}_i)$ exprimés dans $\mathcal{F}'$.
   On a $h(\vec{e'}_1) = -\vec{f_2} = -\frac{1}{2}(\vec{f_1}+\vec{f_2}) + \frac{1}{2}(\vec{f_1}-\vec{f_2}) = -\vec{f'}_1 + \vec{f'}_2$ et donc la première colonne de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{F}'}(h)$ est $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   En procédant de façon analogue pour les colonnes suivantes, on obtient :
   $$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{F}'}(h) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$
4. En utilisant les notations du cours, on a : $\mathbb{R}^3_{\mathcal{E}'} \xrightarrow[P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}]{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}} \mathbb{R}^3_{\mathcal{E}} \xrightarrow[A]{h} \mathbb{R}^2_{\mathcal{F}} \xrightarrow[P_{\mathcal{F}'}^{\mathcal{F}}]{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}} \mathbb{R}^2_{\mathcal{F}'}$.
   On a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{F}'}(h) = P_{\mathcal{F}'}^{\mathcal{F}} A P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}$ avec $P_{\mathcal{F}'}^{\mathcal{F}} = \left(P_{\mathcal{F}}^{\mathcal{F}'}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   On retrouve bien, après calculs, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{F}'}(h) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$.

Exercice n° 9

— Déterminer $\mathrm{Ker}(A)$ c'est résoudre un système linéaire homogène dont la matrice est A. On applique l'algorithme de Gauss sur les lignes et on a $A \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On en déduit que :

$$C = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A) \iff x = y - 2z \iff C = \begin{pmatrix} y-2z \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff C = y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Finalement, $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

— Il y a plusieurs façons de procéder pour déterminer $\mathrm{Im}(A)$.

- Version 1 : le théorème du rang nous donne $\mathrm{rg}(A) = 1$, c'est-à-dire que $\mathrm{Im}(A)$ est une droite vectorielle. Comme $\begin{pmatrix}-1\\-2\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur non-nul de $\mathrm{Im}(A)$, on a $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\-2\\-1\end{pmatrix}\right)$.
- Version 2 : $\mathrm{Im}(A)$ est généré par les colonnes de A. On applique l'algorithme de Gauss sur les colonnes de A et on obtient $A \underset{C}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\2 & 0 & 0\\1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ d'où $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right)$.

2 Un peu plus dur

Exercice n° 10

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On travaille dans $\mathbb{C}$ considéré comme $\mathbb{R}$- espace vectoriel et muni de la base $\mathcal{E} = \{1, i\}$.
On considère l'application $f_\theta : z \mapsto e^{i\theta}\bar{z}$.

1. La conjugaison et la multiplication par $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ sont $\mathbb{R}$-linéaires. Par composition, f_θ est $\mathbb{R}$-linéaire.
2. $f_\theta(1) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos(\theta)1 + \sin(\theta)\mathrm{i}$ et $f_\theta(\mathrm{i}) = -\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \sin(\theta)1 + (-\cos(\theta))\mathrm{i}$ donc $A = \begin{pmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta)\\ \sin(\theta) & -\cos(\theta)\end{pmatrix}$.
3. On calcule $A^2 = I_2$. On en déduit que $f_\theta \circ f_\theta = \mathrm{Id}$, c'est-à-dire que f_θ est une symétrie du plan complexe. Il est évident que f_θ n'est pas triviale et donc, les éléments caractéristiques de f_θ ne sont pas réduits à $\{0\}$. Il existe donc deux complexes a et b tels que f_θ est la symétrie par rapport à $\mathrm{Vect}(a)$ et parallèlement à$\mathrm{Vect}(b)$. On a alors $\mathbb{C} = \mathrm{Vect}(a) \oplus \mathrm{Vect}(b)$ et donc $(a \; ; \; b)$ est donc une base de $\mathbb{C}$. Dans cette base, la matrice de f_θ est $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$.
4. On cherche $(a; b) \in (\mathbb{C}^*)^2$ tels que $f_\theta(a) = a$ et $f_\theta(b) = -b$. En cherchant a et b sous forme exponentielle, on trouve par exemple, $a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$ et $b = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta-\pi}{2}}$.

Exercice n° 11

$u_{\alpha,\beta} \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^4, \mathbb{K}^3)$. D'après le théorème du rang, on a $4 = \dim(\mathrm{Ker}(M_{\alpha,\beta}) + \mathrm{rm}(M_{\alpha,\beta})$.
$\mathrm{rm}(M_{\alpha,\beta}) \leq 3 \Longrightarrow \dim(\mathrm{Ker}(M_{\alpha,\beta}) \geq 1$ et $u_{\alpha,\beta}$ ne peut pas être injective.

$u_{\alpha,\beta}$ est surjective si, et seulement si $\mathrm{rg}(u_{\alpha,\beta}) = 3$. On procède par opérations pour trouver le rang de $M_{\alpha,\beta}$:

$$M_{\alpha,\beta} \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3}}{\sim} \begin{pmatrix}0 & 4 & \alpha+2 & \beta\\0 & 1 & 6 & 1\\-1 & 1 & 2 & 0\end{pmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2}{\sim} \begin{pmatrix}0 & 0 & \alpha-22 & \beta-4\\0 & 1 & 6 & 1\\-1 & 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

Le rang de cette matrice est 3 si, et seulement si, au moins un des deux coefficients de la première ligne est non-nul, c'est-à-dire si, et seulement si, $\alpha \neq 22$ ou $\beta \neq 4$. Il est donc possible d'avoir $u_{\alpha,\beta}$ surjective. Par exemple pour $\alpha = \beta = 0$

Exercice n° 12

Soit $A = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 1 & 0\\2 & -2 & 1\end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

1. f est un projecteur de $\mathbb{R}^3$, si et seulement si, $f \circ f = f$ ce qui, du point de vue matriciel correspond à $A^2 = A$, ce que l'on vérifie facilement par calcul.
2. f est la projection sur $\mathrm{Im}(f)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f)$.
On a $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$ et $\forall \vec{u} \in \mathrm{Im}(f),\; f(\vec{u}) = \vec{u}$ ainsi que $\forall \vec{u} \in \mathrm{Ker}(f),\; f(\vec{u}) = \vec{0}$. Comme f est un projecteur non-trivial (sinon on aurait $A = 0$ ou I_3), on a $\mathrm{rg}(f) \in \{1; 2\}$ et en prenant une base adaptée à la somme directe $\mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$ on a une matrice de l'une des formes voules.

Le rang de toute matrice qui représente f est $\text{rg}(A)$, procédons par opérations sur les colonnes pour le trouver : $A \underset{\substack{C_1 \leftarrow C_1 - 2C_3 \\ C_2 \leftarrow C_2 + 2C_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et donc $\text{rg}(A) = 2$ et A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Trouver une matrice $P \in \mathcal{G}l_3(\mathbb{R})$ telle que $B = P^{-1}AP$, c'est trouver une matrice de passage entre la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et une base adaptée à $\text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f)$. Le travail fait à la question précédente nous donne déjà une base de $\text{Im}(f)$: $(1;1;0)$ et $(0;0;1)$.
Reste à trouver une base de $\text{Ker}(f)$. On sait que $\text{Ker}(f)$ est une droite vectorielle et on observe que $f((1;0;-2)) = (0;0;0)$. On en déduit qu'il génère $\text{Ker}(f)$ et que la base $((1;1;0);(0;0;1);(1;0;-2))$ convient. Finalement, on peut prendre $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

3 Démontrer les résultats du cours et exercices théoriques

Exercice n° 13

Soit u un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Si u est un projecteur alors la matrice de u dans une base adaptée à $E = \text{Im}(u) + \text{Ker}(u)$ est diagonale avec uniquement des 0 et des 1 sur la diagonale.
2. Si la matrice de u est diagonale avec uniquement des 0 et des 1 sur la diagonale, cela signifie que les vecteurs de la base ont pour image par u soit eux-même, soit $\vec{0}$. En notant A_{Id} et B_0 les sous-espaces engendrés par ces vecteurs, u est la projection sur A_{Id} parallèlement à B_0.
3. u est une symétrie s'il existe une base dans laquelle la matrice de u est diagonale avec uniquement des ± 1 sur la diagonale. Une homothétie de rapport λ a pour matrice λI_n dans toute base.

Exercice n° 14

On sait que, si M et N sont deux matrices carrées de même taille, on a $\text{tr}(MN) = \text{tr}(NM)$.
Soit A et B deux matrices carrées semblables : il existe une matrice inversible P telle que $A = P^{-1}BP$. On a donc :

$$\text{tr}(A) = \text{tr}(P^{-1}B \times P) = \text{tr}(P \times P^{-1}B) = \text{tr}(B)$$

Exercice n° 15

Soit E un espace à n dimensions et f un endomorphisme de E.

1. L'équivalence entre $f \circ f = 0$ et $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$ est évidente.
Le théorème du rang donne $n = \dim(\text{Ker}(f)) + \text{rg}(f)$ et, comme $\dim(\text{Ker}(f)) \geq \text{rg}(f)$ alors $\text{rg}(f) \leq \frac{n}{2}$.
2. Soit une combinaison linéaire nulle de $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_r, f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \ldots, f(\vec{e}_r))$:

$$\underbrace{\lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \ldots + \lambda_r\vec{e}_r}_{\in E_1} + \underbrace{\mu_1 f(\vec{e}_1) + \mu_2 f(\vec{e}_2) + \ldots + \mu_r f(\vec{e}_r)}_{\in \text{Ker}(f) \text{ car } f \circ f = 0} = \vec{0}$$

Comme E_1 et $\text{Ker}(f)$ sont supplémentaires, on en déduit que $\lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \ldots + \lambda_r\vec{e}_r = \vec{0}$ ce qui donne la nullité des λ_i puisque $(\vec{e}_i)_{i \in [\![1;r]\!]}$ est libre.
On a également $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \mu_i f(\vec{e}_i) = \vec{0} \iff f\left(\sum_{i=1}^{r} \mu_i \vec{e}_i\right) = \vec{0}$. Le vecteur $\sum_{i=1}^{r} \mu_i \vec{e}_i$ est donc dans $E_1 \cap \text{Ker}(f)$ et donc il est nul. La liberté de $(\vec{e}_i)_{i \in [\![1;r]\!]}$ donne la nullité des μ_i $(i \in [\![1;n]\!])$.
Finalement, la famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_r, f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \ldots, f(\vec{e}_r))$ est libre.

$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_r$ est une base de E_1 et $f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \ldots, f(\vec{e}_r))$ est une famille libre de $\text{Ker}(f)$, on peut la compléter en une base de $\text{Ker}(f)$ par des vecteurs $\vec{y}_{2r+1}, \ldots, \vec{y}_n$.
La famille $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_r, f(\vec{e}_1), \ldots, f(\vec{e}_r), \vec{y}_{2r+1}, \ldots, \vec{y}_n)$ est alors une base de E.

La matrice de f dans cette base est une matrice par blocs (des blocs de zéros de taille précisées et l'identité) :

$$\begin{pmatrix} 0_{r,r} & 0_{r,n-r} \\ I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-2r,r} & 0_{n-2r,n-r} \end{pmatrix}$$

3. On déduit de la forme de la matrice que $\mathrm{Im} f = \ker f$ si, et seulement si, $r = \frac{n}{2}$.
4. On vérifie par le calcul que $A^2 = 0$ ce qui est équivalent à dire que $f \circ f = 0$.
   Il est clair que :
   — $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\right) \subset \mathrm{Ker}(f)$;
   — $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A)$;
   — $\mathrm{Ker}(A) \neq \mathbb{R}^3$ donc $\mathrm{Ker}(A)$ est de dimension 2 et une base de $\mathrm{Ker}(A)$ est $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$.
   La base $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ convient, dans cette base on a $\mathrm{Mat}(f) = \begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

4 Plus difficile

Exercice n° 16

D'un point de vue matriciel, déterminer un endomorphime f de $\mathbb{K}_2[X]$ tel que $f \neq 0$, $f \circ f \neq 0$ et $f \circ f \circ f = 0$ correspond à trouver une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ telle que $M \neq 0$, $M^2 \neq 0$ et $M^3 = 0$. $M = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ convient.
On peut alors prendre pour f l'endomorphime de $\mathbb{K}_2[X]$ dont la matrice dans la base canonique est M.

Exercice n° 17

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est : $M = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&-3&3\end{pmatrix}$.

1. $\mathrm{rg}(M) = 3$ donc u est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.
   u^{-1} est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est M^{-1}. Après calculs, on a $M^{-1} = \begin{pmatrix}3&-3&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$.
2. On cherche $\vec{e}_1$ tel que $u(\vec{e}_1) = \vec{e}_1$. Cette équation conduit à un système dont une solution fournit un vecteur $\vec{e}_1$ qui convient. Par exemple : $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.
   De façon analogue, on trouve des vecteurs convenables, par exemple $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.
3. $\mathrm{rg}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = \mathrm{rg}(\vec{e}_3, \vec{e}_2, \vec{e}_1) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&0&1\\0&1&1\end{pmatrix} = 3$ donc $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. P est la matrice dont les colonnes sont $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$ exprimés dans la base canonique, c'est-à-dire $P = \begin{pmatrix}1&-1&1\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}$.
   Après calculs, on trouve $P^{-1} = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&-1&1\\1&-2&1\end{pmatrix}$.
5. Notons $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. On a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, notons A cette matrice et $M = \mathrm{Mat}_{can}(u)$. On a $M = PAP^{-1}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\mathrm{Mat}_{can}(u^n) = M^n = (PAP^{-1})^n = PA^nP^{-1}$.

Or, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (déjà vu dans le TD sur les matrices, se prouve soit par récurrence après avoir conjecturé la formule, soit en utilisant le binôme de Newton).

Après calculs, on obtient $\mathrm{Mat}_{can}(u^n) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (n-1)(n-2) & -2n(n-2) & n(n-1) \\ n(n-1) & 2(1-n)(1+n) & n(n+1) \\ n(n+1) & -2n(n+1) & (n+1)(n+2) \end{pmatrix}$.

Exercice n° 18

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

Soit $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

1. Les vecteurs de $\mathcal{B}$ ne sont pas colinéaires, ils forment donc une famille libre de deux vecteurs, dans $\mathbb{R}^2$ dont la dimension est 2, $\mathcal{B}$ est donc une base de $\mathbb{R}^2$.
   $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est la matrice dont les colonnes sont $f(\vec{e}_1)$ et $f(\vec{e}_2)$ exprimés dans la base $\mathcal{B}$. On a $f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1$ et $f(\vec{e}_2) = \frac{1}{3}\vec{e}_2$ donc $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. A^n est la matrice de f^n relativement à la base canonique. Déterminons la matrice de f^n relativement à la base $\mathcal{B}$ puis faisons un changement de bases :
   $$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^n) = B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A^n = \mathrm{Mat}_{\mathrm{can}}(f^n) = P^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^n)P = P^{-1}B^nP$$
   avec $P^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\ \mathrm{can}}(\mathrm{Id}) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.
   Après calculs, on a $P = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \frac{1}{4\times 3^n}\begin{pmatrix} 10\times 3^n - 6 & 4\times 3^n - 4 \\ -15\times 3^n + 15 & -6\times 3^n + 10 \end{pmatrix}$.
3. Trouver des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convenables revient, en notant $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$), à résoudre $\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n$.
   Par une récurrence immédiate, cette dernière équation est équivalente à $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^nX_0$ soit :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}((10 - \frac{6}{3^n})x_0 + (4 - \frac{4}{3^n})y_0) \\ \frac{1}{4}((-15 + \frac{15}{3^n})x_0 + (-6 + \frac{10}{3^n})y_0) \end{pmatrix}$$