

# Correction des exercices du chapitre 20

## 1 Applications directes du cours

### Exercice n° 1

---

La série des termes de  $u$  est notée  $\sum u_n$ , il faut bien comprendre que c'est une suite.

La  $n$ -ième somme partielle de cette série est  $\sum_{k=0}^n u_k$ , c'est le terme général de la suite  $\sum u_n$  (on a  $\sum u_n = (\sum_{k=0}^n u_k)_{n \in \mathbb{N}}$ ).

Si la suite  $\sum u_n$  converge, sa limite est notée  $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ .

### Exercice n° 2

---

- $\sum \cos(n)$  est grossièrement divergente.
- $\sum \frac{1}{\ln(n)}$  est divergente car  $\forall n > 2, \frac{1}{n} < \frac{1}{\ln(n)}$  et  $\sum \frac{1}{n}$  est divergente.
- $\sum e^{-n} = \sum (\frac{1}{e})^n$  est une série géométrique convergente (car  $0 < \frac{1}{e} < 1$ ).
- $\sum \frac{10n+3}{5n^2+n+1}$  est une série à termes positifs donc on peut travailler par comparaison à un équivalent.  
On a :  $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{10n+3}{5n^2+n+1} \sim \frac{2}{n}$  qui est le terme général d'une série de Riemann divergente. On en déduit que  $\sum \frac{10n+3}{5n^2+n+1}$  diverge.
- $0 \leq \frac{\sin(n)}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$  et  $\sum \frac{1}{n^2}$  est une série de Riemann convergente. Par comparaison de séries à termes positifs,  $\frac{\sin(n)}{n^2}$  converge.
- $\sum \ln(\sin(\frac{1}{n}))$  est grossièrement divergente car  $\ln(\sin(\frac{1}{n})) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$ .

### Exercice n° 3

- $\sum \frac{n!}{n^n}$  est une série à termes positifs donc on peut travailler par comparaison.  
On a  $\forall n \geq 2, \frac{n!}{n^n} = \prod_{k=1}^n \frac{k}{n} \leq \frac{2}{n^2}$  et  $\sum \frac{2}{n^2}$  converge donc  $\sum \frac{n!}{n^n}$  converge également.
- $\sum \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^3$  est grossièrement divergente.
- $\sum \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$  est une série à termes positifs donc on peut travailler par comparaison à un équivalent.  
On a :  $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = e^{n \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)} \sim e^{-\frac{1}{n}} \rightarrow 1$  donc la série est grossièrement divergente.
- $\sum \frac{1}{(\sqrt{n+1})^n}$  est une série à termes positifs donc on peut travailler par comparaison.  
On a  $\forall n \geq 3, 0 \leq \frac{1}{(\sqrt{n+1})^n} \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \cdot \sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$  est une série de Riemann convergente donc  $\sum \frac{1}{(\sqrt{n+1})^n}$  converge.
- $\sum \frac{1}{(\ln(n))^{\ln(n)}}$  est une série à termes positifs donc on peut travailler par comparaison.  
On a :  $\frac{1}{(\ln(n))^{\ln(n)}} = e^{-\ln(n) \ln(\ln(n))}$ .  
Il existe un rang  $N \in \mathbb{N}$  à partir duquel on a  $\ln(\ln(n)) \geq 2$  et alors,  $n \geq N \implies (\ln(n))^{\ln(n)} \geq n^2$  autrement dit :  $n \geq N \implies \frac{1}{(\ln(n))^{\ln(n)}} \leq \frac{1}{n^2}$ . On en déduit que  $\sum \frac{1}{(\ln(n))^{\ln(n)}}$  converge.

### Exercice n° 4

- $\sum \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)$  est une série à termes positifs donc on peut travailler par comparaison à un équivalent.  
 $1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{\pi^2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$  donc  $\sum \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)$  converge.
- $\sum \sqrt{e^{\frac{1}{n}} - 1}$  est une série à termes positifs donc on peut travailler par comparaison à un équivalent.  
On a  $e^{\frac{1}{n}} - 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$  et  $\sqrt{e^{\frac{1}{n}} - 1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$  qui est le terme général d'une série divergente. On en déduit que  $\sum \sqrt{e^{\frac{1}{n}} - 1}$  diverge.
- $\forall n \geq 1, \cos\left(\frac{1}{n}\right) \in ]0; 1[$  donc  $\sum \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$  est une série à termes négatifs, on peut donc travailler par comparaison à un équivalent.  
On a :  $\cos\left(\frac{1}{n}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$  et donc  $\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$  qui est le terme général d'une série convergente. On en déduit que  $\sum \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$  converge.
- $\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{(n^2)}$  est une série à termes positifs donc on peut travailler par comparaison à un équivalent. On a  $\forall n > 0$  :  
$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{(n^2)} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n^2} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2} = e^{-n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} e^{-n^2 \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-n} e^{\frac{1}{2}}$$
 qui est le terme général d'une série convergente. On en déduit que  $\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{(n^2)}$  converge.
- $\sum \frac{\cos(n^2) + n \sin(n)}{n^2 \sqrt{n}}$  n'est pas une série à terme de signe constant. On passe par la convergence absolue :

$$\forall n \geq 1, \left| \frac{\cos(n^2) + n \sin(n)}{n^2 \sqrt{n}} \right| \leq \frac{1+n}{n^2 \sqrt{n}} \leq \frac{2n}{n^2 \sqrt{n}} = \frac{2}{n\sqrt{n}}$$

$\frac{2}{n\sqrt{n}}$  est le terme général d'une série de Riemann convergente, on en déduit que  $\sum \frac{\cos(n^2) + n \sin(n)}{n^2 \sqrt{n}}$  converge absolument et donc converge.

## 2 Vrai ou faux sur l'ensemble du chapitre

- a) Faux. Changer un terme ne change pas la nature de la série mais, dans le cas où  $\sum u_n$  converge, cela change la valeur de la somme. Prenons un contre-exemple très simple. La série de terme général 0 converge et sa somme vaut 0. Si on modifie le premier terme en 1, la somme vaut 1.

Notez qu'écrire «  $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$  » n'a pas de sens si la série est divergente.

- b) Faux. La série harmonique est un contre-exemple.

- c) Vrai. Une suite non-stationnaire d'entiers n'est pas convergente et donc, en particulier, ne converge pas vers 0. La série est donc grossièrement divergente.
- d) Faux. On prend,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = 1$  et  $v_n = -1$ .  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  divergent mais  $\sum(u_n + v_n)$  converge.
- e) Faux. La série harmonique alternée est un contre-exemple.
- f) Faux. C'est vrai uniquement pour les séries à termes positifs. Contre exemple :  $\forall n > 0$ ,  $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$  et  $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ . On a  $\sum u_n$  qui diverge et  $\sum v_n$  qui converge.
- g) Vrai. Si  $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$  alors, à partir d'un certain rang  $u_n > 0$  et donc on peut utiliser le critère de comparaison.
- h) Vrai. C'est évident : si  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \geq 0$  alors  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $|u_n| = u_n$ .
- i) Vrai. Par exemple, la série harmonique.
- j) Faux. Contre exemple : la série harmonique alternée pour  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$ .
- k) Faux. Contre exemple :  $\forall n > 0$ ,  $u_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{1}{n^{10}} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$  est une série à termes positifs qui converge mais dont le terme général n'est pas décroissant.

### 3 Variations autour de la série harmonique

#### Exercice n° 5

1. Version 1 avec la convexité. La fonction  $\ln(1+x)$  est concave et donc sa courbe est au-dessous de ses tangentes, en particulier en dessous de  $y = x$ .

Version 2 (hyper classique) en faisant une étude de fonction. On prouve que la fonction  $f(x) = x - \ln(1+x)$ , définie et dérivable sur  $] -1; +\infty[$  admet pour minimum 0 et que ce minimum est atteint en 0.

On a donc :  $\forall x > -1$ ,  $f(x) \geq 0 \iff \ln(1+x) \leq x$ .

2. Soit un entier naturel  $n$  non nul. En utilisant la question 1. on a :

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}$$

On somme ces inégalités :

$$\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

O,  $\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^n \ln(k+1) - \ln(k) = \ln(n+1) \rightarrow +\infty$ . On en déduit que  $\sum \frac{1}{n}$  diverge.

#### Exercice n° 6

1. On a :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{2n} = (n+1) \times \frac{1}{2n} \geq n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$ .

2. Si  $\sum \frac{1}{n}$  convergeait, la suite des restes partiels tendrait vers 0, ce qui est impossible en vertu de l'inégalité prouvée à la question précédente.

#### Exercice n° 7

1. On a :  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}$  (puisque  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est positive et décroissante sur  $\mathbb{R}^{+*}$ ).

On somme ces inégalités pour  $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$  (avec  $n > 0$ ) :  $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \ln(n) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$  : (★). On note  $H_n$  la  $n$ -ième somme partielle de la série harmonique et (★) devient :  $H_n - 1 \leq \ln(n) \leq H_n - \frac{1}{n}$ .

On en déduit :  $\forall n \geq 1$ ,  $\ln(n) \leq H_n \leq \ln(n) + 1$ .

2. On a :  $\forall n \geq 1, \ln(n) \leq H_n \leq \ln(n)+1$ . Le théorème des gendarmes s'applique et on obtient  $H_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ .  
 Pour  $n > 1$  en divisant les inégalités par  $\ln(n)$  puis en passant à la limite on a  $H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$ .
3. a)  $\forall n > 1, \gamma_n - \gamma_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln(n) + \ln(n-1) = \frac{1}{n} + \ln(1 - \frac{1}{n}) \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \leq 0$  (car  $\ln$  est concave).  
 $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est donc décroissante.
- b) On a vu que  $\forall n \geq 1, \ln(n) \leq H_n$  soit  $\forall n \geq 1, 0 \leq \gamma_n$ . La suite  $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante et minorée, on en déduit qu'elle converge.
- c) Soit  $\gamma = \lim_n \gamma_n$ . On a  $\gamma_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \gamma + o(1)$  et donc  $H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$ .

### Exercice n° 8

La fonction  $f : x \mapsto \ln(1+x)$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -1; +\infty[$ . On peut donc lui appliquer l'inégalité de Taylor Lagrange en  $a = 0$  : pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $x > -1$  on a :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} M \quad : (\star)$$

où  $M$  est un majorant de  $f^{(n+1)}$  entre 0 et  $x$ . Calculons les dérivées successives de  $f$  :

$$\forall x > -1, f'(x) = (1+x)^{-1} ; f''(x) = -(1+x)^{-2} ; \dots ; f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} (k-1)! (1+x)^{-k}$$

$$(\star) \text{ devient : } \left| f(x) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} M \text{ et, pour } x = 1 : \left| \ln(2) + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} \right| \leq \frac{1}{(n+1)!} M.$$

Il reste à trouver un majorant de  $|f^{(n+1)}(x)|$  sur  $[0; 1]$ . On a :  $\forall x \in [0; 1], |f^{(n+1)}(x)| = n!(1+x)^{-n-1} \leq n!$ .  
 Finalement :

$$\left| \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} - (-\ln(2)) \right| \leq \frac{1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

### Exercice n° 9

1. On a  $\forall k \geq 1, \int_0^1 x^{k-1} dx = \left[ \frac{1}{k} x^k \right]_0^1 = \frac{1}{k}$ .

2. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} &= \sum_{k=1}^n (-1)^k \int_0^1 x^{k-1} dx \\ &= - \sum_{k=1}^n \int_0^1 (-x)^{k-1} dx \\ &= - \int_0^1 \sum_{k=1}^n (-x)^{k-1} dx \\ &= - \int_0^1 \frac{1 - (-x)^n}{1+x} dx \\ &= - \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx}_{= \ln(2)} + \underbrace{\int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x} dx}_{\rightarrow 0} \end{aligned}$$

Finalement, la série harmonique alternée converge vers  $-\ln(2)$ .

### Exercice n° 10

1 et 2) Voici des codes possibles pour les fonctions demandées :

```

10 def sommePartielleV2(n):
11     Somme=0
12     i,j=1,1 #i est l'indice pour les termes impairs, j pour les pairs
13
14     #on traite les paquets de trois termes
15     while i<=n//3:
16         Somme=Somme-1/(2*i-1)+1/(2*j)+1/(2*(j+1))
17         i=i+1
18         j=j+2
19
20     #on traite les éventuels paquets incomplets
21     if n%3==1:
22         Somme=Somme-1/n
23     elif n%3==2:
24         Somme=Somme-1/(n-1)+1/n
25
26     return(Somme)

1 def sommePartielle(n):
2     Somme=0
3     signe=-1
4     for i in range(1,n+1):
5         Somme=Somme+signe*1/i
6         signe=-signe
7     return(Somme)

```

3) On imagine qu'on aura un résultat proche de 0 mais il n'en n'est rien. La différence semble converger vers  $-\frac{1}{2} \ln(2)$ .

En changeant l'ordre des termes, on a changé la valeur de la somme. Ce résultat est contre-intuitif et illustre une des difficultés avec les séries qui convergent sans converger absolument.

Pour mieux comprendre cet exemple :

$$\begin{aligned}
 -\ln(2) &= -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \dots \stackrel{?}{=} \left(-1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8}\right) + \left(-\frac{1}{5} \dots\right) \\
 &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{8}\right) + \left(-\frac{1}{10} \dots\right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \dots\right) \\
 &= -\frac{1}{2} \ln(2)
 \end{aligned}$$

Lorsqu'une série  $\sum u_n$  converge absolument,  $\sum u_n$  converge et la valeur de la somme ne dépend pas de l'ordre des termes, on dit que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **sommable**.  
 Si  $\sum u_n$  converge mais pas  $\sum |u_n|$ , on parle de *semi-convergence* et la valeur de la somme peut être modifiée quand on change l'ordre des termes.

## 4 Un peu plus difficile

### Exercice n° 11

- $\sum u_n$  converge donc  $u_n \rightarrow 0$  et, en particulier, à partir d'un certain rang  $N$  on a  $0 \leq u_n \leq 1$  d'où  $0 \leq u_n^2 \leq u_n$  ce qui garantit que  $\sum u_n^2$  converge.
- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$  donc  $0 \leq \frac{u_n}{u_n + 1} \leq u_n$  ce qui garantit que  $\sum \frac{u_n}{u_n + 1}$  converge.
- $(u_n)_n$  est une suite positive qui converge vers 0 donc :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies 0 \leq u_{2n} \leq 1$$

ce qui entraîne :  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies 0 \leq u_{2n} u_n \leq u_n$  donc  $\sum u_n u_{2n}$  converge.

- $\sum u_n$  converge donc  $u_n \rightarrow 0$  et on a  $e^{u_n} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + u_n + o(u_n) - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{=} u_n + o(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$ . Par comparaison de séries à termes positifs, on déduit que  $\sum (e^{u_n} - 1)$  converge.

$$\forall n \geq 1, \left( \sqrt{u_n} - \sqrt{\frac{1}{n^2}} \right)^2 \geq 0 \iff \frac{1}{2} \left( u_n + \frac{1}{n^2} \right) \geq \frac{\sqrt{u_n}}{n}.$$

La convergence de  $\sum u_n$  et de  $\sum \frac{1}{n^2}$  nous permet de déduire celle de  $\sum \frac{\sqrt{u_n}}{n}$ .

### Exercice n° 12

On a :  $\forall k \geq 3, \frac{1}{k \ln(k)} \geq \int_{k-1}^k \frac{dx}{x \ln(x)} \iff \frac{1}{k \ln(k)} \geq \ln(\ln(k)) - \ln(\ln(k-1))$ . Il suit :

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)} \geq \sum_{k=3}^n \frac{1}{k \ln(k)} \geq \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2))$$

On en déduit que  $\sum \frac{1}{n \ln n}$  diverge vers  $+\infty$ .

### Exercice n° 13

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , notons  $S_n$  la somme partielle d'indice  $n$  de  $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ .

$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$  est une fonction strictement croissante sur  $\mathbb{R}^+$ . On a donc :  $\forall k \geq 1, \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \geq \frac{1}{\sqrt{k+1}}$ .

En sommant pour  $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$  on obtient :  $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \int_1^n \frac{1}{\sqrt{x}} dx \geq \sum_{k=2}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$ . Autrement dit :

$$S_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \geq 2\sqrt{n} - 1 \geq S_n - 1 \iff S_n + 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \geq 2\sqrt{n} - 1 \geq S_n$$

Ce qui implique :  $2\sqrt{n} - 2 \leq S_n \leq 2\sqrt{n} - 1$  et donc  $S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$ .

### Exercice n° 14

— On a :  $\forall n > 0, n^{-(1+(1/n))} = e^{-(1+\frac{1}{n})\ln(n)} = e^{-\ln(n)} e^{-\frac{\ln(n)}{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ .

Par équivalence sur les séries à termes positifs,  $\sum n^{-(1+(1/n))}$  diverge.

— On a :  $\forall n > 0, \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ .

Par équivalence sur les séries à termes positifs,  $\sum \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$  diverge.

— On a :  $\forall n > 0, \frac{\ln(n)}{\ln(e^n - 1)} \geq \frac{\ln(n)}{\ln(e^n)} = \frac{\ln(n)}{n} \geq \frac{1}{n}$ .

On en déduit que  $\sum \frac{\ln(n)}{\ln(e^n - 1)}$  diverge.

— On a :  $\forall n \geq 1, n^{\ln(n)} e^{-\sqrt{n}} = e^{\ln(n)^2 - \sqrt{n}}$ . Or,  $\ln(n)^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(\sqrt{n})$  et  $\ln(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(\sqrt{n})$  donc il existe un rang  $N$  à partir duquel on a  $\ln(n) - \sqrt{n} \leq -2\ln(n)$  et alors :

$$e^{\ln(n)^2 - \sqrt{n}} \leq e^{-2\ln(n)} = \frac{1}{n^2}$$

Par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que  $\sum n^{\ln n} e^{-\sqrt{n}}$  converge.

—  $\forall n > 0, (\operatorname{ch} \sqrt{\ln(n)})^{-2} = \frac{4}{(e^{\sqrt{\ln(n)}} + e^{-\sqrt{\ln(n)}})^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{4}{e^{2\sqrt{\ln(n)}}}$ .

Pour  $n$  assez grand, on a  $\ln(\sqrt{n}) = \frac{1}{2} \ln(n) \geq \sqrt{\ln(n)}$  d'où  $\frac{4}{e^{2\sqrt{\ln(n)}}} \geq \frac{4}{n}$  qui est le terme général d'une série divergente.

On en déduit, par comparaison de séries à termes positifs, que  $\sum (\operatorname{ch} \sqrt{\ln n})^{-2}$  diverge.

### Exercice n° 15

a) On a,  $\forall n \geq 0$  :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (k+1)3^{-k} \times (1-3^{-1}) &= \sum_{k=0}^n (k+1)3^{-k} - \sum_{k=0}^n (k+1)3^{-(k+1)} \\ &= \sum_{k=0}^n (k+1)3^{-k} + \sum_{k=0}^n 3^{-k} - \sum_{k=0}^n k3^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^n 3^{-k} - (n+1)3^{-(n+1)} \end{aligned}$$

Or,  $\sum_{k=0}^n 3^{-k} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{1-1/3} = \frac{3}{2}$  et  $(n+1)3^{-(n+1)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$  donc  $\sum_{k=0}^n (k+1)3^{-k} \times (1-3^{-1}) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{3}{2}$ .

On en déduit  $\sum_{k=0}^n (k+1)3^{-k} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{9}{4}$

b) On a,  $\forall n \geq 3$  :

$$\begin{aligned} \sum_{k=3}^n \frac{2k-1}{k^3-4k} &= \sum_{k=3}^n \frac{\frac{1}{4}}{k} + \frac{\frac{3}{8}}{k-2} + \frac{\frac{-5}{8}}{k+2} \\ &= \frac{1}{8} \left( \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} + 3 \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{k} - 5 \sum_{k=5}^{n+2} \frac{1}{k} \right) \\ &= \frac{1}{8} \left( \frac{2}{3} + \frac{2}{4} + 3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{3} + \frac{3}{4} - \frac{3}{n-1} - \frac{3}{n} - \frac{5}{n+1} - \frac{5}{n+2} \right) \\ &\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{89}{12} \end{aligned}$$

c) On a,  $X^4 + X^2 + 1 = (X^2 + 1)^2 - X^2 = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1)$  d'où  $\forall n \geq 0$  :

$$\sum_{k=0}^n \frac{k}{k^4 + k^2 + 1} = \frac{1}{2} \left( \sum_{k=0}^n \frac{1}{k^2 - k + 1} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k^2 + k + 1} \right)$$

Or,  $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ ,  $k^2 + k + 1 = (k+1)^2 - (k+1) + 1$  d'où :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{k}{k^4 + k^2 + 1} &= \frac{1}{2} \left( \sum_{k=0}^n \frac{1}{k^2 - k + 1} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^2 - (k+1) + 1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_{k=0}^n \frac{1}{k^2 - k + 1} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2 - k + 1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{(n+1)^2 - (n+1) + 1} \right) \\ &\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{2} \end{aligned}$$

## Exercice n° 16

soit  $x = 2,357373737373\dots$

• Version 1 : on a  $100x - x = 235,73737373 - 2,3573737373 = 233,38$  et donc  $x = \frac{233,38}{99} = \frac{23338}{9900}$  est rationnel.

• Version 2 :  $x = 2,35 + 73(10^{-4} + 10^{-6} + \dots) = 2,35 + 73 \sum_{k=2}^{+\infty} 10^{-2k} = 2,35 + 73 \sum_{k=2}^{+\infty} (10^{-2})^k$ .

La somme  $\sum_{k=2}^{+\infty} (10^{-2})^k$  est géométrique, calculons-là en retrouvant notre formule de référence :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} (10^{-2})^k = \left( \sum_{k=0}^{+\infty} (10^{-2})^k \right) - 1 - 10^{-2} = \frac{1}{1-10^{-2}} - 1 - 10^{-2} = \frac{100}{99} - 1 - \frac{1}{100} = \frac{1}{9900}$$

On en déduit  $x = 2,35 + \frac{73}{9900} = \frac{239 \times 99 + 73}{9900}$ .

### Exercice n° 17

---

Soit  $x = 101, 101101101 \dots_2$ . On a :

$$\begin{aligned}x &= 2^2 + 2^0 + 2^{-1} + 2^{-3} + 2^{-4} + 2^{-6} + 2^{-7} + \dots \\&= 5 + \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-1-3k} + \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-3-3k} \\&= 5 + (2^{-1} + 2^{-3}) \sum_{k=0}^{+\infty} (2^{-3})^k \\&= 5 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right) \frac{1}{1 - \frac{1}{8}} \\&= 5 + \frac{5}{8} \times \frac{8}{7} \\&= \frac{40}{7}\end{aligned}$$

## 5 Plus difficile

### Exercice n° 18

---

Soit  $a, b$  des réels strictement positifs.  $\sum \frac{a^n 2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n}} + b^n}$  est à termes positifs, on peut donc travailler par comparaison.

— Si  $b > 1$  :  $\frac{a^n 2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n}} + b^n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \left(\frac{a}{b}\right)^n 2^{\sqrt{n}} = e^{n(\ln(\frac{a}{b}) + \frac{\ln(2)}{\sqrt{n}})}$ .

Comme  $\frac{\ln(2)}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$ , la série converge si, et seulement si,  $\ln(\frac{a}{b}) < 0$  c'est-à-dire si, et seulement si,  $a < b$ .

— Si  $b \leq 1$  :  $2^{\sqrt{n}} + b^n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 2^{\sqrt{n}}$  et  $\frac{a^n 2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n}} + b^n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} a^n$ . On en déduit que la série converge alors si, et seulement si,  $a < 1$ .

### Exercice n° 19

---

Supposons que  $P$  et  $Q$  sont non nuls. À partir d'un certain rang,  $(P(n))_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(Q(n))_{n \in \mathbb{N}}$  sont non-nuls et de signe constant, donc  $(\frac{P(n)}{Q(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  est bien défini et de signe constant, on peut donc travailler par comparaison à un équivalent.

Notons  $a$  et  $b$  les coefficients dominants de  $P$  et  $Q$ ; ce sont des réels non nuls.

On a :  $\frac{P(n)}{Q(n)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{a}{b} n^{\deg(P) - \deg(Q)}$  qui est le terme général d'une série de Riemann qui converge si, et seulement si,  $\deg(P) - \deg(Q) < -1 \iff \deg(Q) \geq \deg(P) + 2$ .

### Exercice n° 20

---

a) En utilisant la formule  $\tan(x - y) = \frac{\tan(x) - \tan(y)}{1 + \tan(x)\tan(y)}$  on obtient que  $\arctan\left(\frac{a-b}{1+ab}\right) = \arctan(a) - \arctan(b)$ .

(On pourra noter que la condition de positivité de  $a$  et  $b$  garantit que tous les termes sont bien définis).

b) —  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{1}{k^2+k+1} = \frac{(k+1)-k}{k^2+k+1}$  donc  $\forall n \in \mathbb{N}$ , :

$$\sum_{k=0}^n \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) = \sum_{k=0}^n \arctan(k+1) - \arctan(k) = \arctan(n+1) - \arctan(0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2}$$

—  $\forall k \geq 1$ ,  $\frac{1}{k^2} = \frac{(k+1)-(k-1)}{1-(k+1)(k-1)}$  donc  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \arctan\left(\frac{2}{k^2}\right) &= \sum_{k=1}^n \arctan(k+1) - \arctan(k-1) \\&= \arctan(n+1) + \arctan(n) - \arctan(1) - \arctan(0) \\&\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{3\pi}{4}\end{aligned}$$

Après avoir justifié la convergence de  $\sum_{n \geq 0} \arctan\left(\frac{1}{k^2 + k + 1}\right)$  et  $\sum_{n \geq 1} \arctan\left(\frac{2}{k^2}\right)$ , calculer leurs sommes en se servant de la première question.

**Exercice n° 21**

---

- Si  $\alpha < 1$  : à partir d'un certain rang,  $\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} > \frac{1}{n}$  et la série  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$  diverge.
- Si  $\alpha > 1$  : soit  $1 < \gamma < \alpha$ . À partir d'un certain rang, on a  $0 < \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \frac{1}{n^\gamma}$  et  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$  converge.
- Si  $\alpha = 1$  :
  - Si  $\beta = 1$  : on a déjà vu dans un exercice précédent que  $\sum \frac{1}{n \ln(n)}$  diverge.
  - Si  $\beta < 1$  : on a  $\frac{1}{n \ln(n)^\beta} > \frac{1}{n \ln(n)}$  et donc la série diverge.
  - Si  $\beta > 1$  : la série est de la même nature que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_2^n \frac{1}{x \ln(x)^\beta} dx$ . En faisant le changement de variable  $\varphi(t) = e^t$  on obtient la convergence de la série.