Correction des exercices du chapitre 21

Exercice n° 1

a) Vrai. X est une application définie sur Ω, deux issues différentes peuvent avoir la même image par X. Par exemple, on lance un dé et X vaut 1 si le résultat est pair. On a $X(\{2\}) = X(\{4\})$.

b) Faux. X est une application définie sur Ω, une issue à une seule image par X.

c) Faux. Par exemple on lance deux fois une pièce équilibrée et X est le nombre de pile obtenus. X prend ses valeurs dans $\{0; 1; 2\}$. On a alors $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{4}$.

d) Faux. Par exemple, si on lance un dé truqué qui tombe sur 6 avec une probabilité $\frac{1}{2}$, sur les autres issues avec une probabilité de $\frac{1}{10}$ et qu'on considère X qui vaut 1 si on obtient 6 et 0 sinon. On a $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{2}$ mais on n'a pas équiprobabilité sur l'univers.

e) Faux. On lance une pièce deux fois, X est le nombre de pile obtenus et Y le nombre de face. On a $X \neq Y$.

f) Faux. On reprend l'exemple précédent, si la pièce est équilibrée alors X et Y suivent la même loi de probabilité mais $X \neq Y$.

g) Vrai. Si $E(X) = E(Y)$ alors $E(X - Y) = E(X) - E(Y) = 0$ par linéarité de l'espérance.

h) Faux. Par exemple, $X \sim \mathcal{U}(\{-1; 1\})$ est centrée. X^2 est suit une loi certaine pour la valeur 1, son espérance est 1.

i) Vrai. Si X^2 est centrée alors $\sum x_i^2 \mathbb{P}(X = x_i) = 0$ et donc $\forall i,\ x_i^2 \mathbb{P}(X = x_i) = 0$ ce qui signifie que, soit $x_i = 0$ soit $\mathbb{P}(X = x_i) = 0$. Autrement dit, X est suit une loi certaine et prend la valeur 0 avec une probabilité 1. On a donc $E(X) = 0$.

j) Faux. Une loi binomiale prend des valeurs entières, pas des couples.

1 Applications directes du cours

Exercice n° 2

Une urne contient 10 boules indiscernable : 5 rouges, 3 jaunes et 2 vertes. On tire au hasard 3 boules de cette urne et on considère la variable aléatoire X qui est le nombre de couleurs différentes du tirage effectué.

1. Il y a $\binom{10}{3}$ tirages possibles et, comme les boules sont indiscernables, il y a équiprobabilité sur l'univers. X prend pour valeurs $1, 2$ et 3. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = 1) &= \mathbb{P}(\text{"les boules ont la même couleur"}) = \mathbb{P}(\text{"trois rouges ou trois jaunes"}) \\
&= \mathbb{P}(\text{"trois rouges"}) + \mathbb{P}(\text{"trois rouges"}) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{10}{3}} + \frac{\binom{3}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{11}{120} \\
\mathbb{P}(X = 3) &= \mathbb{P}(\text{"trois boules de couleurs différentes"}) = \frac{\binom{5}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{5 \times 3 \times 2}{120} = \frac{1}{4} \\
\mathbb{P}(X = 2) &= 1 - (\mathbb{P}(X \neq 2)) = 1 - (P(X = 1) + P(X = 3)) = 1 - \frac{41}{120} = \frac{79}{120}
\end{aligned}$$

La loi de probabilité de X est donc :

x_i	1	2	3	Total
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{11}{120}$	$\frac{79}{120}$	$\frac{1}{4}$	1

2. — $E(X) = \sum x_i \mathbb{P}(X = x_i) = 1 \times \frac{11}{120} + 2 \times \frac{79}{120} + 3 \times \frac{1}{4} = \frac{11+158+90}{120} = \frac{259}{120}$.
   — $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 1^2 \times \frac{11}{120} + 2^2 \times \frac{79}{120} + 3^2 \times \frac{1}{4} - \left(\frac{259}{120}\right)^2 = \frac{597}{120} - \left(\frac{259}{120}\right)^2 = \frac{4559}{120^2}$

Exercice n° 3

$X \sim \mathcal{U}(\llbracket -2; 2 \rrbracket)$ signifie que la loi de X est donnée par :

x_i	-2	-1	0	1	2	Total
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

On en déduit la loi de Y :

y_i	0	1	4	Total
$\mathbb{P}(Y = y_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

D'ou $E(Y)=\sum y_i \mathbb{P}(Y=y_i)=\frac{2}{5}+\frac{8}{5}=2$ et $V(Y)=E(Y^2)-E(Y)^2=\frac{34}{5}-2^2=\frac{14}{5}$.

Exercice n° 4

Soit X et Y deux variables aléatoires dont la loi conjointe est résumée par :

$Y \backslash X$	-1	0	1
0	$0,1$	$0,1$	$0,1$
1	$0,3$	$0,1$	0
2	0	$0,1$	$0,2$

1. On a :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq Y) &= \mathbb{P}((X,Y)\in\{(0;0);(1;0);(1;1)\})\\ &= \mathbb{P}((X,Y)=(0;0))+\mathbb{P}((X,Y)=1;0))+\mathbb{P}((X,Y)=(1;1))\\ &= 0,1+0,1+0=0,2\end{aligned}$$
2. Par lecture du tableau, on a :

x_i	-1	0	1	Total
$\mathbb{P}(X=x_i)$	$0,4$	$0,3$	$0,3$	1

et

y_i	0	1	2	Total
$\mathbb{P}(Y=y_i)$	$0,3$	$0,4$	$0,3$	1

3. $E(X)=\sum x_i\mathbb{P}(X=x_i)=-0,1\neq 0$ donc X n'est pas centrée.
4. $\mathbb{P}((X=1\cap(Y=1))=\mathbb{P}((X;Y)=(1;1))=0$ et $\mathbb{P}(X=1)\times\mathbb{P}(Y=1)=0,12$ donc X et Y ne sont pas indépendantes.

Exercice n° 5

Soit $X\sim\mathcal{U}(\{-1;0;1\})$, et $Y=X^2$.
1. $\mathbb{P}((X=0)\cap(Y=1))=0$ alors que $\mathbb{P}(X=0)\times\mathbb{P}(Y=1)=\frac{2}{9}$ donc X et Y ne sont pas indépendantes.
2. $\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=E(X^3)$ et $X^3\sim X$ donc $E(X^3)=E(X)=0$. Les variables aléatoires sont donc dépendantes mais décorrelées.

Exercice n° 6

$k\geq 2$. On note, pour $i\in\{1;2\}$, N_i l'événement "on tire une boule noire au lancé i", $B_i=\overline{N_i}$.
1. Y_k prend ses valeurs dans $\{5;-9;-1\}$.
2. On a :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_k=5) &= \mathbb{P}((N_1\cap B_1)\sqcup(B_1\cap N_2))=\mathbb{P}(N_1\cap B_1)+\mathbb{P}(B_1\cap N_2)\\ &= \mathbb{P}(N_1)\mathbb{P}(B_1)+\mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(N_2)\quad\text{(indép. des lancés)}\\ &= 2\mathbb{P}(N_1)\mathbb{P}(B_1)\quad\text{(les lancés sont identiques)}\\ &= 2\times\frac{k}{k+3}\times\frac{3}{k+3}=\frac{6k}{(k+3)^2}\end{aligned}$$
3.

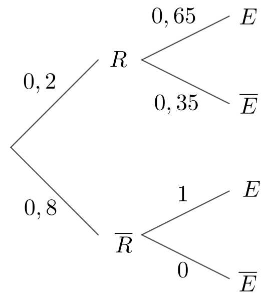
y_i	5	-9	-1	Total
$\mathbb{P}(Y_k=y_i)$	$\frac{6k}{(k+3)^2}$	$\frac{9}{(k+3)^2}$	$\frac{k^2}{(k+3)^2}$	1

4. Le jeu est favorable au joueur lorsque l'espérance de Y_k est strictement positive. On a :
$$E(Y_k)>0\iff\frac{30k-81-k^2}{(k+3)^2}>0\iff k^2-30k+81<0\iff(k-3)(k-27)<0$$
Comme k est entier, on en déduit que le jeu est favorable au joueur si, et seulement si, $k\in[\![4;26]\!]$.

2 Un peu plus dur

Exercice n° 7

1. On a d'abord un premier test, qui conduit ou non à une réparation, puis un second test (qu'on fait figurer également dans le cas où il n'y a pas de réparation en considérant que l'écran est alors expédié avec une probabilité 1) :



On a donc $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E \cap R) + \mathbb{P}(E \cap \overline{R}) = \mathbb{P}_R(E)\mathbb{P}(R) + \mathbb{P}_{\overline{R}}(E)\mathbb{P}(\overline{R}) = 0,93$.

2. a) La loi de B est :

b_i	$p - 700$	$p - 780$	-750	Total
$\mathbb{P}(B = b_i)$	$0,8$	$0,13$	$0,07$	1

b) La production est rentable si, et seulement si, $E(B) > 0$. On a :

$$E(B) > 0 \iff 0,93p - 713,9 > 0 \iff p > \frac{713,9}{0,93}$$

Comme p est entier, la production est rentable dès que $p \geq 768$.

c) Soit C le gain si on supprime l'étape de répararion. On a $E(C) = 0,8p - 694$.
La stratégie sans réparation est meilleure que celle avec réparation si, et seulement si :

$$E(C) - E(B) \geq 0 \iff -0,13p + 19,9 \geq 0 \iff p \leq 153$$

Finalement, la stratégie sans réparation est meilleure pour des prix pour lesquels $E(C) < 0$ c'est-à-dire pour lesquels la production est déficitaire. Le cadre commercial a donc tort.

Exercice n° 8

1. A l'aide d'un arbre on détermine la loi de N :

n_i	1	2	3	4	5	6	7	8	Total
$\mathbb{P}(N = n_i)$	$\frac{8}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

2. On calcule et on a $E(N) = \frac{10}{3}$ et $V(N) = \frac{35}{9}$.

Exercice n° 9

1. (a) Puisque les pannes des différents moteurs surviennent de façon indépendantes selon une loi de Bernoulli de paramètre x, $X_3 \sim \mathcal{B}(n = 3, x)$ et $X_4 \sim \mathcal{B}(n = 4, x)$.

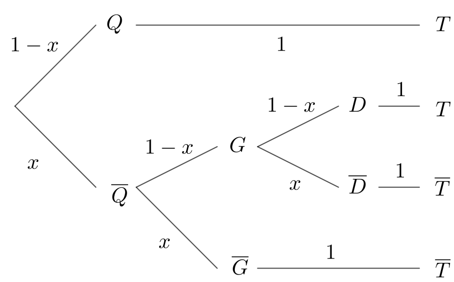
(b) L'événement "strictement moins de la moitié des moteurs d'un trimoteur tombent en panne" est $(X_3 < \frac{3}{2})$. On a :

$$\mathbb{P}(X_3 < \frac{3}{2}) = \mathbb{P}(X_3 \in \{0; 1\}) = \mathbb{P}(X_3 = 0) + \mathbb{P}(X_3 = 1) = (1 - x)^3 + 3x(1 - x)^2 = (1 - x)^2(1 + 3x)$$

De façon analogue : $\mathbb{P}(X_4 < 2) = (1 - x)^3(1 + 3x)$.

2. (a) On introduit des événements et on modélise l'expérience aléatoire à l'aide d'un arbre :

— T : « le trimoteur achève son vol » ;
— Q : « le moteur de queue fonctionne » ;
— G : « le moteur de gauche fonctionne » ;
— D : « le moteur de droite fonctionne ».



On a alors : $\mathbb{P}(T) = (1 - x)(1 + x(1 - x)) = (1 - x)(-x^2 + x + 1)$.

(b) On a : $\mathbb{P}(Q) = (1-x)^2(1+x)^2$.

3. $\mathbb{P}(T) - \mathbb{P}(Q) = (1-x)x^3 > 0$ donc le trimoteur est plus sûr que le quadrimoteur.

Exercice n° 10

1. Un papayer porte des fruits s'il est femelle ou bisexué, c'est-à-dire avec une probabilité $p = 0,6$.
2. (a) X compte le nombre de succès (un papayer qui porte des fruits) dans la répétition indépendante de 5 expériences de Bernoulli de paramètre p. On a donc $X \sim \mathcal{B}(n = 5, p)$.
   (b) $\mathbb{P}(X = 0) = (1-p)^5 = 0,4^5$.
   (c) $\mathbb{P}(X = 3) = \binom{5}{3} p^3 (1-p)^2$.
3. Soit $n \geq 1$ et X_n le nombre de papayers qui portent des fruits lorsqu'on en plante n. On a $X_n \sim \mathcal{B}(n, p)$.

$$\mathbb{P}(X_n) = 0 < \frac{0,1}{100} \iff 0,4^n \leq 10^{-3} \iff n \geq \frac{-3\ln(10)}{\ln(0,4)}$$

Comme n est entier, on obtient $n \geq 8$ pour avoir au moins $99,9\%$ de chances d'avoir des papayes.

Exercice n° 11

1. X prend ses valeurs dans $[\![1; 1800]\!]$.
2. Avec un arbre, on voit que $\mathbb{P}(X = 0) = (\frac{2}{3})^{1800}$.
3. $\mathbb{P}(X = 1800) = (\frac{1}{3})^{1800}$
4. X compte le nombre de succès (un participant choisit V1) dans la répétition indépendante de 1800 expériences de Bernoulli indépendantes de paramètre $p = \frac{1}{3}$ on a donc $X \sim \mathcal{B}(n = 1800, p = \frac{1}{3}$.
5. $E(X) = np = 600$.
6. On utilise l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev : $\forall \alpha > 0,\ \mathbb{P}(|X - E(X)| \geq \alpha) \leq \dfrac{V(X)}{\alpha^2}$.

   $\mathbb{P}(\text{"pas besoin d'autres cintres"}) = \mathbb{P}(X \leq 800) \leq \mathbb{P}(400 \leq X \leq 800) = \mathbb{P}(|X-600| \leq 200) = 1 + \mathbb{P}(|X-600| \geq 201)$

   Or, $\mathbb{P}(|X - 600| \geq 201) \leq \frac{600 \times \frac{1}{3}}{201^2} \leq \frac{1}{200}$ et donc on a bien $\mathbb{P}(\text{"pas besoin d'autres cintres"}) \leq 1 - \frac{1}{100}$.

Exercice n° 12

1. (a) $X_2 \in \{-2; 0; 2\}$.
   (b) $Y_2 \sim \mathcal{B}(n = 2; p = \frac{1}{2})$.
   (c) $\mathbb{P}(X_2 = 0) = \mathbb{P}(Y_2 = 1) = \frac{1}{2}$.
2. $\mathbb{P}(X_3 = 0) = 0$ car X_3 prend ses valeurs dans $\{-3; -1; 1; 3\}$.
3. (a) $Y_2 \sim \mathcal{B}(n; p = \frac{1}{2})$.
   (b) $X_n = Y_n - (n - Y_n) = 2Y_n - n$.
   (c) $P(X_n = 0) = \mathbb{P}(Y_n = \frac{n}{2})$. Si n est impair, $\frac{n}{2}$ n'est pas entier et $\mathbb{P}(Y_n = \frac{n}{2}) = 0$.
   Si n est pair, $\mathbb{P}(Y_n = \frac{n}{2}) = \binom{n}{\frac{n}{2}} \frac{1}{2^n}$.

3 Exercices théoriques

Exercice n° 13

Pour tout $\beta > 0$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mu - \beta\sigma < X < \mu + \beta\sigma) &= \mathbb{P}(-\beta\sigma < X - \mu < \beta\sigma) \\ &= \mathbb{P}(|X - \mu| < \beta\sigma) \\ &= 1 - \mathbb{P}(|X - \mu| \geq \beta\sigma)\end{aligned}$$

Or, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev on a : $\mathbb{P}(|X - \mu| \geq \beta\sigma) \leq \frac{\sigma^2}{\beta^2\sigma^2}$ et donc :

$$\mathbb{P}(\mu - \beta\sigma < X < \mu + \beta\sigma) \geq 1 - \frac{1}{\beta^2}.$$

Exercice n° 14

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}^+$ et $a \in \mathbb{R}^{+*}$. On note $x_1, \dots, x_n$ les valeurs prises par X. On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq a) = \sum_{x_i \geq a} \mathbb{P}(X = x_i) &\leq \sum_{x_i \geq a} \frac{x_i}{a} \mathbb{P}(X = x_i) \qquad \text{(puisqu'on ne considère que les } x_i \geq a)\\ &\leq \frac{1}{a} \sum_{x_i \geq a} x_i \mathbb{P}(X = x_i) \leq \frac{1}{a} \sum x_i \mathbb{P}(X = x_i)\end{aligned}$$

Finalement, on a bien : $\mathbb{P}(X \geq a) \leq \dfrac{E(X)}{a}$.

Exercice n° 15

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev : $\forall \alpha > 0,\ \mathbb{P}(|X - E(X)| \geq \alpha) \leq \dfrac{V(x)}{\alpha^2}$.

Soit $\alpha > 0$. On a l'égalité des événements $\big((X - E(X))^2 \geq \alpha^2\big) = (|X - E(X)| \geq \alpha)$. En appliquant l'inégalité de Markov à $(X - E(X))^2$ on obtient :

$$\mathbb{P}((X - E(X))^2 \geq \alpha^2) \leq \frac{\sigma^2}{\alpha^2} \iff \mathbb{P}(|X - E(X)| \geq \alpha) \leq \frac{V(x)}{\alpha^2}$$