

Chapitre 21 - Matrices et Applications Linéaires - Exercices

1 Applications directes du cours

Exercice n° 1

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ et u l'application linéaire canoniquement associée à M .

1. Entre quels espaces opère u ?
2. Déterminer $\text{Ker}(M)$. En déduire $\text{rg}(M)$ puis déterminer une base de $\text{Im}(M)$.

Exercice n° 2

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par $f((x; y; z)) = (2x + y + 3z; x - y; 6x - 3y + 3z)$.
(On ne demande pas de prouver que f est linéaire mais vous pouvez le vérifier).

1. Donner la matrice M de f relativement à la base canonique de \mathbb{R}^3 .
2. Utiliser M pour calculer l'image des vecteurs de la base canonique.
3. Déterminer une base de $\text{Im}(M)$. En déduire $\dim(\text{Ker}(M))$.

Exercice n° 3

Soit f , l'endomorphisme de $\mathbb{K}_3[X]$ défini pour tout $P \in \mathbb{K}_3[X]$ par $f(P) = P - XP'$.

1. Déterminer la matrice de f relativement à la base canonique de $\mathbb{K}_3[X]$.
2. Déterminer le rang de f puis une base de $\text{Im}(f)$.

Exercice n° 4

On travaille dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Déterminer la matrice de l'homothétie vectorielle de rapport λ relativement à la base $(\vec{i}; \vec{j})$.
2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer la matrice de la rotation vectorielle d'angle θ relativement à la base $(\vec{i}; \vec{j})$.

Exercice n° 5

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

1. Déterminer $f(X^2 + 3X - 5)$ puis $f(aX^2 + bX + c)$.
2. Après avoir justifié que f est un isomorphisme, déterminer f^{-1} .
3. Après avoir justifié que $\mathcal{B} = (1 - X^2, X + X^2, 1 + X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$, déterminer la matrice de f relativement à la base \mathcal{B} .

Exercice n° 6

On travaille dans le plan muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$.

Soit f la projection sur l'axe des abscisses $\text{Vect}(\vec{i})$ parallèlement à $\text{Vect}(\vec{i} + \vec{j})$.

1. Déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f)$.
2. Soit $\mathcal{B}' = (\vec{i} - \vec{j}, -2\vec{i} + 3\vec{j})$. Après avoir justifié que \mathcal{B}' est une autre base du plan, déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(f)$.
3. Déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}'}(f)$.
4. Reprendre les questions précédentes en faisant apparaître les matrices de passage.

Exercice n° 7

Soit h l'application linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^2 définie par rapport à deux bases $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et $\mathcal{F} = (\vec{f}_1, \vec{f}_2)$ par la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Dans \mathbb{R}^3 , on considère : $\vec{e}'_1 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{e}'_2 = \vec{e}_3 + \vec{e}_1$, $\vec{e}'_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$.
Justifier que $\mathcal{E}' = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 .
2. Déterminer la matrice de h relativement aux bases \mathcal{E}' et \mathcal{F} .
3. Après avoir justifié que la famille $\mathcal{F}' = (\frac{1}{2}(\vec{f}_1 + \vec{f}_2), \frac{1}{2}(\vec{f}_1 - \vec{f}_2))$ est une base de \mathbb{R}^2 , donner $\text{Mat}_{\mathcal{E}', \mathcal{F}'}(h)$.
4. Reprendre les questions précédentes en faisant apparaître les matrices de passage

Exercice n° 8

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer le noyau, l'image et le rang de A .

2 Vrai ou faux sur l'ensemble du chapitre

E et F désignent des \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimensions finies (non nulles) n et p ; u est un élément de $\mathcal{L}(E, F)$.
 \mathcal{B}_E et \mathcal{B}_F désignent des bases de E et F .

- a) $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
- b) Si u est un isomorphisme alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u)$ est carrée.
- c) Si v est un endomorphisme surjectif de E alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(v)$ est inversible.
- d) Si v est un endomorphisme de E qui n'est pas injectif, alors il existe une base de E dans laquelle la matrice de v a au moins une colonne nulle.
- e) Une matrice de passage est inversible.
- f) Une matrice inversible est une matrice de passage.
- g) Toutes les matrices de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ ont le même rang.
- h) Toute matrice carrée inversible est semblable à l'identité.
- i) Si v est un automorphisme de E alors $v \circ v$ aussi.
- j) Un système ayant une unique solution est de Cramer.

3 Un peu plus dur

Exercice n° 9

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On travaille dans \mathbb{C} considéré comme \mathbb{R} -espace vectoriel et muni de la base $\mathcal{E} = \{1, i\}$.
On considère l'application $f_\theta : z \mapsto e^{i\theta} \bar{z}$.

1. Montrer que f_θ est \mathbb{R} -linéaire.
2. Déterminer $A = \text{Mat}_{\mathcal{E}}(f_\theta)$.
3. Calculer A^2 . En déduire l'existence d'une base \mathcal{B} de \mathbb{C} dans laquelle la matrice de f_θ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
4. Trouver une telle base \mathcal{B} .

Exercice n° 10

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $u_{\alpha, \beta}$ l'application linéaire canoniquement associée à la matrice : $M_{\alpha, \beta} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \alpha & \beta \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Existe-t-il des valeurs de α et de β telles que $u_{\alpha, \beta}$ soit injective? surjective?

Exercice n° 11

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 canoniquement associé à A .

1. Prouver que f est un projecteur de \mathbb{R}^3 .
2. En déduire que A est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ou à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Préciser à laquelle, qu'on désigne ensuite par B .
3. Trouver une matrice $P \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

4 Démontrer les résultats du cours et exercices théoriques

Exercice n° 12

Soit u un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Démontrer que si u est un projecteur alors il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale avec uniquement des 0 et des 1 sur la diagonale.
2. La réciproque est-elle vraie ?
3. Peut-on trouver un résultat similaire pour les symétries ? Les homothéties ?

Exercice n° 13

Démontrer que deux matrices carrées semblables ont la même trace.

Exercice n° 14

Soit E un espace à n dimensions et f un endomorphisme de E .

1. Montrer que la condition $f^2 = 0$ est équivalente à $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$. Quelle condition vérifie alors le rang de f ? On suppose dans le reste de l'exercice que $f \circ f = 0$.
2. Soit E_1 un supplémentaire de $\text{Ker}(f)$ dans E et soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_r)$ une base de E_1 . Montrer que la famille des vecteurs $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_r, f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_r))$ est libre. Montrer comment on peut la compléter, si nécessaire, par des vecteurs de $\text{ker } f$ de façon à obtenir une base de E . Quelle est la matrice de f dans cette base ?
3. Sous quelle condition nécessaire et suffisante a-t-on $\text{Im } f = \text{ker } f$?

4. Exemple : Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Montrer que $f^2 = 0$. Déterminer une nouvelle base dans laquelle la matrice de f a la forme indiquée dans la question 2).

5 Plus difficile

Exercice n° 15

Déterminer un endomorphisme f de $\mathbb{K}_2[X]$ tel que $f \neq 0$, $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$.

Exercice n° 16

Soit u l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que u est un automorphisme de \mathbb{R}^3 et déterminer u^{-1} .
2. Déterminer des vecteurs \vec{e}_1, \vec{e}_2 et \vec{e}_3 tels que :

$$u(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 \quad ; \quad u(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \quad ; \quad u(\vec{e}_3) = \vec{e}_2 + \vec{e}_3$$

3. Justifier que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 .
4. Déterminer P la matrice de passage de la base canonique à $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ainsi que P^{-1} .
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $\text{Mat}_{\text{can}}(u^n)$.

Exercice n° 17

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^2 de matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

Soit $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

1. Justifier que $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une base de \mathbb{R}^2 puis déterminer $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
2. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

3. Déterminer l'ensemble des suites réelles qui vérifient $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + \frac{2}{3}y_n \\ y_{n+1} = -\frac{5}{2}x_n - \frac{2}{3}y_n \end{cases}$.