

Correction des exercices du chapitre 21

1 Applications directes du cours

Exercice n° 1

1. $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^3, \mathbb{K}^2)$.
2. Déterminer le noyau de M c'est résoudre un système linéaire homogène dont la matrice est M :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker}(u) \iff \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 5x + 2y - 4z = 0 \end{cases}$$

On procède par opérations sur les lignes :

$$M \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & -9 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{7} \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{9}{7} \end{pmatrix} \quad (L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1; L_2 \leftarrow \frac{1}{7}L_2 \text{ puis } L_1 \leftarrow L_1 + L_2)$$

On en déduit que les vecteurs de $\text{Ker}(u)$ sont de la forme $z \begin{pmatrix} 2/7 \\ 9/7 \\ 1 \end{pmatrix}$ c'est-à-dire que $\text{Ker}(u) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix} \right)$.

On applique le théorème du rang : $3 = 1 + \text{rg}(M)$ et donc $\text{rg}(M) = 2$.

$\text{Im}(M)$ est un sous-espace de \mathbb{K}^2 de dimension 2, c'est donc \mathbb{K}^2 et toute base de \mathbb{K}^2 est une base de $\text{Im}(u)$.

Il y en a deux qui sont « naturelles » : la base canonique et $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$.

Exercice n° 2

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par $f((x; y; z)) = (2x + y + 3z; x - y; 6x - 3y + 3z)$.

1. $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Les images des vecteurs de la base canonique sont les vecteurs représentés par les colonnes $M \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$M \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $M \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire les colonnes de M .

3. La famille $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ est génératrice de $\text{Im}(M)$; autrement dit : les colonnes de M engendrent

$\text{Im}(M)$. On procède par opérations sur les colonnes (ce qui correspond à faire des combinaisons linéaires sur les colonnes et donc conserve leur espace engendré) :

$$M \underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \\ 12 & -3 & 12 \end{pmatrix} \underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 12 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad (C_1 \leftarrow C_1 - 2C_2 \text{ et } C_3 \leftarrow C_3 + 3C_2 \text{ puis } C_3 \leftarrow C_3 - C_2)$$

On en déduit que : $\text{Im}(M) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$. Cette dernière famille, étant libre puisque ce sont deux vecteurs qui ne sont pas colinéaires, est une base de $\text{Im}(M)$.

Le théorème du rang s'applique : $3 = \dim(\text{Ker}(f)) + 2 \iff \dim(\text{Ker}(f)) = 1$.

Exercice n° 3

- On a : $f(1) = 1$, $f(X) = 0$, $f(X^2) = -X^2$ et $f(X^3) = -2X^3$ d'où $\text{Mat}_{\text{can}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.
- Cette matrice est diagonale, son rang est 3 et une base de $\text{Im}(f)$ est $(1; X^2; X^3)$.

Exercice n° 4

- La matrice de l'homothétie vectorielle de rapport $\lambda \in \mathbb{R}^*$ relativement à toute base du plan est λI_2 .
- Il faut faire une figure pour bien comprendre.
La rotation vectorielle d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ envoie \vec{i} sur $r_\theta(\vec{i}) = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j}$ et \vec{j} sur $r_\theta(\vec{j}) = -\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j}$.
La matrice de r_θ dans la base orthonormée $(\vec{i}; \vec{j})$ est donc $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

Exercice n° 5

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

- $f(X^2 + 3X - 5)$ est le polynôme dont la colonne dans la base canonique est $A \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}$, c'est à dire $-17 + 6X - 5X^2$.
On procède de la même façon et on obtient $f(aX^2 + bX + c) = (3c - b + a) + 2bX + (c - b + 3a)X^2$.
- f est un isomorphisme si, et seulement si, A est inversible. Déterminons son rang par opérations :

$$A \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} I_3$$

Le rang de A est donc 3 et f est un isomorphisme de $\mathbb{K}_2[X]$.

Son isomorphisme réciproque f^{-1} a pour matrice dans la base canonique A^{-1} .

Après calculs, on a $A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

- On vérifie facilement que la famille $\mathcal{B} = (1 - X^2, X + X^2, 1 + X^2)$ est génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$, comme elle comporte 3 polynômes, c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
La matrice de f relativement à la base \mathcal{B} est la matrice dont les colonnes sont les images des vecteurs de \mathcal{B} exprimés dans \mathcal{B} .

Après calculs, on a $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Remarque : l'année prochaine, vous verrez comment trouver une base dans laquelle se diagonalise f (comme le permet \mathcal{B} dans cet exercice). Vous parlerez de valeurs propres, d'espaces propres...

Exercice n° 6

- On a $f(\vec{i}) = \vec{i}$ et $f(\vec{j}) = f((\vec{i} + \vec{j}) - \vec{i}) = -\vec{i}$ donc $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- $\mathcal{B}' = (\vec{i} - \vec{j}, -2\vec{i} + 3\vec{j})$ est une famille libre de deux vecteurs du plan, c'en est donc une base. $\text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(f)$ a pour colonnes $f(\vec{i} - \vec{j})$ et $f(-2\vec{i} + 3\vec{j})$ exprimés dans \mathcal{B} .
On a $f(\vec{i} - \vec{j}) = 2\vec{i}$ et $f(-2\vec{i} + 3\vec{j}) = 5\vec{i}$ donc $\text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- $\text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}'}(f)$ a pour colonnes $f(\vec{i} - \vec{j})$ et $f(-2\vec{i} + 3\vec{j})$ exprimés dans \mathcal{B}' .
On a $f(\vec{i} - \vec{j}) = 2\vec{i} = 6(\vec{i} - \vec{j}) + 2(-2\vec{i} + 3\vec{j})$ et $f(-2\vec{i} + 3\vec{j}) = 5\vec{i} = -15(\vec{i} - \vec{j}) + 5(-2\vec{i} + 3\vec{j})$.
On en déduit : $\text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 6 & -15 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$.

4. On a $P_B^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}'}(f) = \left(P_B^{\mathcal{B}'}\right)^{-1} \underbrace{\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f) P_B^{\mathcal{B}'}}_{=\text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(f)}$.

Exercice n° 7

1. On a $\vec{e}_1 = \frac{1}{2}(\vec{e}'_2 + \vec{e}'_3 - \vec{e}'_1)$, $\vec{e}_2 = \frac{1}{2}(\vec{e}'_1 + \vec{e}'_3 - \vec{e}'_2)$ et $\vec{e}_3 = \frac{1}{2}(\vec{e}'_1 + \vec{e}'_2 - \vec{e}'_3)$ donc la famille $(\vec{e}'_1 ; \vec{e}'_2 ; \vec{e}'_3)$ est génératrice de \mathbb{R}^3 . Comme son cardinal est $\dim(\mathbb{R}^3)$, on en déduit que c'est une base de \mathbb{R}^3 .

2. Les colonnes de $\text{Mat}_{\mathcal{E}', \mathcal{F}}(h)$ sont $h(\vec{e}'_1)$, $h(\vec{e}'_2)$ et $h(\vec{e}'_3)$ exprimés dans \mathcal{F} .

On a $h(\vec{e}'_1) = h(\vec{e}_2 + \vec{e}_3) = h(\vec{e}_2) + h(\vec{e}_3)$. Or, $h(\vec{e}_2)$ et $h(\vec{e}_3)$ exprimés dans \mathcal{F} sont les 2^e et 3^e colonnes de A . La première colonne de $\text{Mat}_{\mathcal{E}', \mathcal{F}}(h)$ est donc $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

On procède de façon analogue pour les 2^e et 3^e colonnes, on obtient : $\text{Mat}_{\mathcal{E}', \mathcal{F}}(h) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

3. La famille $(\vec{f}_1 ; \vec{f}_2)$ est libre donc la famille $\mathcal{F}' = (\frac{1}{2}(\vec{f}_1 + \vec{f}_2), \frac{1}{2}(\vec{f}_1 - \vec{f}_2))$ l'est aussi. Puisqu'elle a pour cardinal $2 = \dim(\mathbb{R}^2)$, c'est bien une base de \mathbb{R}^2 .

Pour $i \in \llbracket 1; 3 \rrbracket$, la i -^e colonne de $\text{Mat}_{\mathcal{E}', \mathcal{F}'}(h)$ correspond au vecteur $h(\vec{e}'_i)$ exprimés dans \mathcal{F}' .

On a $h(\vec{e}'_1) = -\vec{f}_2 = -\frac{1}{2}(\vec{f}_1 + \vec{f}_2) + \frac{1}{2}(\vec{f}_1 - \vec{f}_2) = -\vec{f}'_1 + \vec{f}'_2$ et donc la première colonne de $\text{Mat}_{\mathcal{E}', \mathcal{F}'}(h)$ est $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

En procédant de façon analogue pour les colonnes suivantes, on obtient :

$$\text{Mat}_{\mathcal{E}', \mathcal{F}'}(h) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

4. En utilisant les notations du cours, on a : $\mathbb{R}_{\mathcal{E}'}^3 \xrightarrow[\text{P}_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}'}]{\text{Id}_{\mathbb{R}^3}} \mathbb{R}_{\mathcal{E}}^3 \xrightarrow[A]{h} \mathbb{R}_{\mathcal{F}}^2 \xrightarrow[\text{P}_{\mathcal{F}'}^{\mathcal{F}}]{\text{Id}_{\mathbb{R}^2}} \mathbb{R}_{\mathcal{F}'}^2$.

On a $\text{Mat}_{\mathcal{E}', \mathcal{F}'}(h) = P_{\mathcal{F}'}^{\mathcal{F}} A P_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}'}$ avec $P_{\mathcal{F}'}^{\mathcal{F}} = \left(P_{\mathcal{F}}^{\mathcal{F}'}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $P_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On retrouve bien, après calculs, $\text{Mat}_{\mathcal{E}', \mathcal{F}'}(h) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$.

Exercice n° 8

— Déterminer $\text{Ker}(A)$ c'est résoudre un système linéaire homogène dont la matrice est A . On applique

l'algorithme de Gauss sur les lignes et on a $A \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On en déduit que :

$$C = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker}(A) \iff x = y - 2z \iff C = \begin{pmatrix} y - 2z \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff C = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Finalement, $\text{Ker}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

— Il y a plusieurs façons de procéder pour déterminer $\text{Im}(A)$.

- Version 1 : le théorème du rang nous donne $\text{rg}(A) = 1$, c'est-à-dire que $\text{Im}(A)$ est une droite vectorielle.

Comme $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur non-nul de $\text{Im}(A)$, on a $\text{Im}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

- Version 2 : $\text{Im}(A)$ est généré par les colonnes de A . On applique l'algorithme de Gauss sur les colonnes

de A et on obtient $A \underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ d'où $\text{Im}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

2 Vrai ou faux sur l'ensemble du chapitre

- a) Faux. $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u)$ est une matrice à p lignes et n colonnes.
- b) Vrai. Si u est un isomorphisme alors E et F ont même dimension et $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}$ est carrée.
- c) Vrai. Si v est un endomorphisme surjectif de E alors v est un isomorphisme de E et $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(v)$ est inversible.
- d) Vrai. Si v est un endomorphisme de E qui n'est pas injectif, alors il existe $\vec{x} \neq \vec{0}$ tel que $v(\vec{x}) = \vec{0}$. On complète (\vec{x}) en une base de E . Dans cette base, la matrice de u a sa première colonne qui est nulle.
- e) Vrai. Une matrice de passage est une matrice qui représente l'identité (de \mathbb{K}^n) qui est un automorphisme.
- f) Vrai. Une matrice M inversible a ses colonnes qui forment une base de \mathbb{K}^n , notons-la \mathcal{B} .
On peut voir M comme $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \text{can}}(\text{Id}_{\mathbb{K}^n})$, c'est à dire comme la matrice de passage $P_{\text{can}}^{\mathcal{B}}$.
- g) Vrai. Toute matrice de $\mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$ représente un isomorphisme de \mathbb{K}^n et a pour rang n .
- h) Faux. I_n commute avec toute les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et donc n'est semblable qu'à elle-même.
- i) Vrai. On l'a déjà vu dans le chapitre sur les applications linéaires. D'un point de vue matriciel, cela correspond à dire que, si $M \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$ alors $M^2 \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$.
- j) Faux. Le système $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ a une unique solution mais n'est pas un système carré, donc ce n'est pas un système de Cramer. (Pour mémoire un système de Cramer est un système $AX = B$ avec $A \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$, il a alors une unique solution quelle que soit le second membre B).

3 Un peu plus dur

Exercice n° 9

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On travaille dans \mathbb{C} considéré comme \mathbb{R} - espace vectoriel et muni de la base $\mathcal{E} = \{1, i\}$.
On considère l'application $f_\theta : z \mapsto e^{i\theta} \bar{z}$.

- La conjugaison et la multiplication par $e^{i\theta}$ sont \mathbb{R} -linéaires. Par composition, f_θ est \mathbb{R} -linéaire.
- $f_\theta(1) = e^{i\theta} = \cos(\theta)1 + \sin(\theta)i$ et $f_\theta(i) = -ie^{i\theta} = \sin(\theta)1 + (-\cos(\theta))i$ donc $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$.
- On calcule $A^2 = I_2$. On en déduit que $f_\theta \circ f_\theta = \text{Id}$, c'est-à-dire que f_θ est une symétrie du plan complexe. Il est évident que f_θ n'est pas triviale et donc, les éléments caractéristiques de f_θ ne sont pas réduits à $\{0\}$. Il existe donc deux complexes a et b tels que f_θ est la symétrie par rapport à $\text{Vect}(a)$ et parallèlement à $\text{Vect}(b)$. On a alors $\mathbb{C} = \text{Vect}(a) \oplus \text{Vect}(b)$ et donc $(a; b)$ est donc une base de \mathbb{C} . Dans cette base, la matrice de f_θ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
- On cherche $(a; b) \in (\mathbb{C}^*)^2$ tels que $f_\theta(a) = a$ et $f_\theta(b) = -b$. En cherchant a et b sous forme exponentielle, on trouve par exemple, $a = e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $b = e^{i\frac{\theta-\pi}{2}}$.

Exercice n° 10

$u_{\alpha, \beta} \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^4, \mathbb{K}^3)$. D'après le théorème du rang, on a $4 = \dim(\text{Ker}(M_{\alpha, \beta}) + \text{rg}(M_{\alpha, \beta}))$.
 $\text{rg}(M_{\alpha, \beta}) \leq 3 \implies \dim(\text{Ker}(M_{\alpha, \beta})) \geq 1$ et $u_{\alpha, \beta}$ ne peut pas être injective.

$u_{\alpha, \beta}$ est surjective si, et seulement si $\text{rg}(u_{\alpha, \beta}) = 3$. On procède par opérations pour trouver le rang de $M_{\alpha, \beta}$:

$$M_{\alpha, \beta} \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 4 & \alpha + 2 & \beta \\ 0 & 1 & 6 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftarrow -L_1 - 4L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha - 22 & \beta - 4 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Le rang de cette matrice est 3 si, et seulement si, au moins un des deux coefficients de la première ligne est non-nul, c'est-à-dire si, et seulement si, $\alpha \neq 22$ ou $\beta \neq 4$. Il est donc possible d'avoir $u_{\alpha, \beta}$ surjective. Par exemple pour $\alpha = \beta = 0$

Exercice n° 11

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 canoniquement associé à A .

1. f est un projecteur de \mathbb{R}^3 , si et seulement si, $f \circ f = f$ ce qui, du point de vue matriciel correspond à $A^2 = A$, ce que l'on vérifie facilement par calcul.
2. f est la projection sur $\text{Im}(f)$ parallèlement à $\text{Ker}(f)$.

On a $\mathbb{R}^3 = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f)$ et $\forall \vec{u} \in \text{Im}(f)$, $f(\vec{u}) = \vec{u}$ ainsi que $\forall \vec{u} \in \text{Ker}(f)$, $f(\vec{u}) = \vec{0}$. Comme f est un projecteur non-trivial (sinon on aurait $A = 0$ ou I_3), on a $\text{rg}(f) \in \{1; 2\}$ et en prenant une base adaptée à la somme directe $\text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f)$ on a une matrice de l'une des formes voules.

Le rang de toute matrice qui représente f est $\text{rg}(A)$, procédons par opérations sur les colonnes pour le

trouver : $A \sim \begin{pmatrix} c_1 & c_1 - 2c_3 \\ c_2 & c_2 + 2c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et donc $\text{rg}(A) = 2$ et A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Trouver une matrice $P \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $B = P^{-1}AP$, c'est trouver une matrice de passage entre la base canonique de \mathbb{R}^3 et une base adaptée à $\text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f)$. Le travail fait à la question précédente nous donne déjà une base de $\text{Im}(f)$: $(1; 1; 0)$ et $(0; 0; 1)$.

Reste à trouver une base de $\text{Ker}(f)$. On sait que $\text{Ker}(f)$ est une droite vectorielle et on observe que $f((1; 0; -2)) = (0; 0; 0)$. On en déduit qu'il génère $\text{Ker}(f)$ et que la base $((1; 1; 0); (0; 0; 1); (1; 0; -2))$

convient. Finalement, on peut prendre $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

4 Démontrer les résultats du cours et exercices théoriques

Exercice n° 12

Soit u un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Si u est un projecteur alors la matrice de u dans une base adaptée à $E = \text{Im}(u) + \text{Ker}(u)$ est diagonale avec uniquement des 0 et des 1 sur la diagonale.
2. Si la matrice de u est diagonale avec uniquement des 0 et des 1 sur la diagonale, cela signifie que les vecteurs de la base ont pour image par u soit eux-même, soit $\vec{0}$. En notant A_{Id} et B_0 les sous-espaces engendrés par ces vecteurs, u est la projection sur A_{Id} parallèlement à B_0 .
3. u est une symétrie s'il existe une base dans laquelle la matrice de u est diagonale avec uniquement des ± 1 sur la diagonale. Une homothétie de rapport λ a pour matrice λI_n dans toute base.

Exercice n° 13

On sait que, si M et N sont deux matrices carrées de même taille, on a $\text{tr}(MN) = \text{tr}(NM)$.

Soit A et B deux matrices carrées semblables : il existe une matrice inversible P telle que $A = P^{-1}BP$. On a donc :

$$\text{tr}(A) = \text{tr}(P^{-1}B \times P) = \text{tr}(P \times P^{-1}B) = \text{tr}(B)$$

Exercice n° 14

Soit E un espace à n dimensions et f un endomorphisme de E .

1. L'équivalence entre $f \circ f = 0$ et $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$ est évidente.
Le théorème du rang donne $n = \dim(\text{Ker}(f)) + \text{rg}(f)$ et, comme $\dim(\text{Ker}(f)) \geq \text{rg}(f)$ alors $\text{rg}(f) \leq \frac{n}{2}$.
2. Soit une combinaison linéaire nulle de $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_r, f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_r))$:

$$\underbrace{\lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \dots + \lambda_r \vec{e}_r}_{\in E_1} + \underbrace{\mu_1 f(\vec{e}_1) + \mu_2 f(\vec{e}_2) + \dots + \mu_r f(\vec{e}_r)}_{\in \text{Ker}(f) \text{ car } f \circ f = 0} = \vec{0}$$

Comme E_1 et $\text{Ker}(f)$ sont supplémentaires, on en déduit que $\lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \dots + \lambda_r \vec{e}_r = \vec{0}$ ce qui donne la nullité des λ_i puisque $(\vec{e}_i)_{i \in [1; r]}$ est libre.

On a également $\sum_{i=1}^r \mu_i f(\vec{e}_i) = \vec{0} \iff f\left(\sum_{i=1}^r \mu_i \vec{e}_i\right) = \vec{0}$. Le vecteur $\sum_{i=1}^r \mu_i \vec{e}_i$ est donc dans $E_1 \cap \text{Ker}(f)$

et donc il est nul. La liberté de $(\vec{e}_i)_{i \in [1; r]}$ donne la nullité des μ_i ($i \in [1; r]$).

Finalement, la famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_r, f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_r))$ est libre.

$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_r$ est une base de E_1 et $f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_r)$ est une famille libre de $\text{Ker}(f)$, on peut la compléter en une base de $\text{Ker}(f)$ par des vecteurs $\vec{y}_{2r+1}, \dots, \vec{y}_n$.

La famille $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_r, f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_r), \vec{y}_{2r+1}, \dots, \vec{y}_n)$ est alors une base de E .

La matrice de f dans cette base est une matrice par blocs (des blocs de zéros de taille précisées et l'identité) :

$$\begin{pmatrix} 0_{r,r} & 0_{r,n-r} \\ I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-2r,r} & 0_{n-2r,n-r} \end{pmatrix}$$

- On déduit de la forme de la matrice que $\text{Im} f = \ker f$ si, et seulement si, $r = \frac{n}{2}$.
- On vérifie par le calcul que $A^2 = 0$ ce qui est équivalent à dire que $f \circ f = 0$.

Il est clair que :

$$\text{— } \text{Im}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \subset \text{Ker}(f);$$

$$\text{— } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(A);$$

$$\text{— } \text{Ker}(A) \neq \mathbb{R}^3 \text{ donc } \text{Ker}(A) \text{ est de dimension 2 et une base de } \text{Ker}(A) \text{ est } \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

$$\text{La base } \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \text{ convient, dans cette base on a } \text{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5 Plus difficile

Exercice n° 15

D'un point de vue matriciel, déterminer un endomorphisme f de $\mathbb{K}_2[X]$ tel que $f \neq 0$, $f \circ f \neq 0$ et $f \circ f \circ f = 0$ correspond à trouver une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ telle que $M \neq 0$, $M^2 \neq 0$ et $M^3 = 0$. $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ convient.

On peut alors prendre pour f l'endomorphisme de $\mathbb{K}_2[X]$ dont la matrice dans la base canonique est M .

Exercice n° 16

Soit u l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

- $\text{rg}(M) = 3$ donc u est un automorphisme de \mathbb{R}^3 .
 u^{-1} est l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est M^{-1} . Après calculs, on a

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- On cherche \vec{e}_1 tel que $u(\vec{e}_1) = \vec{e}_1$. Cette équation conduit à un système dont une solution fournit un vecteur \vec{e}_1 qui convient. Par exemple : $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

De façon analogue, on trouve des vecteurs convenables, par exemple $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $\text{rg}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$ (après calculs) donc $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 .

- P est la matrice dont les colonnes sont \vec{e}_1 , \vec{e}_2 et \vec{e}_3 exprimés dans la base canonique, c'est-à-dire $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Après calculs, on trouve $P^{-1} =$.

5. Notons $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. On a $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, notons A cette matrice et $M = \text{Mat}_{\text{can}}(u)$. On a $M = PAP^{-1}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\text{Mat}_{\text{can}}(u^n) = M^n = (PAP^{-1})^n = PA^nP^{-1}$.

Or, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (déjà vu dans le TD sur les matrices, se prouve soit par récurrence après avoir conjecturé la formule, soit en utilisant le binôme de Newton).

Après calculs, on obtient $\text{Mat}_{\text{can}}(u^n) =$.

Exercice n° 17

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^2 de matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

Soit $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

- Les vecteurs de \mathcal{B} ne sont pas colinéaires, ils forment donc une famille libre de deux vecteurs, dans \mathbb{R}^2 dont la dimension est 2, \mathcal{B} est donc une base de \mathbb{R}^2 .
 $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est la matrice dont les colonnes sont $f(\vec{e}_1)$ et $f(\vec{e}_2)$ exprimés dans la base \mathcal{B} . On a $f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1$ et $f(\vec{e}_2) = \frac{1}{3}\vec{e}_2$ donc $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. A^n est la matrice de f^n relativement à la base canonique. Déterminons la matrice de f^n relativement à la base \mathcal{B} puis faisons un changement de bases :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^n) = B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^{-n} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^n = \text{Mat}_{\text{can}}(f^n) = P^{-1}\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^n)P = P^{-1}B^nP$$

$$\text{avec } P^{-1} = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \text{can}}(\text{Id}) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Après calculs, on a } P = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, A^n = \frac{1}{4 \times 3^n} \begin{pmatrix} 10 \times 3^{-n} - 6 & 4 \times 3^{-n} - 4 \\ -15 \times 3^{-n} + 15 & -6 \times 3^{-n} + 10 \end{pmatrix}.$$

- Trouver des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convenables revient, en notant $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$), à résoudre $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n$.

Par une récurrence immédiate, cette dernière équation est équivalente à $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$ soit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}((10 - \frac{6}{3^n})x_0 + (4 - \frac{4}{3^n})y_0) \\ \frac{1}{4}((-15 + \frac{15}{3^n})x_0 + (-6 + \frac{10}{3^n})y_0) \end{pmatrix}$$