Chapitre 23 - Déterminants - Exercices

Exercice n° 1

Vrai ou faux sur l'ensemble du chapitre. E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. $\mathcal{B}$ désigne une base de E. A est une matrice carrée de taille n.

a) Faux. Si la famille comporte strictement moins de n vecteurs, on ne peut pas se servir du déterminant.

b) Vrai. une famille de n vecteurs de E est génératrice si, et seulement si, c'est une base.

c) Vrai. Permuter des vecteurs multiplie le déterminant par -1.

d) Faux. Le déterminant de $u \in \mathcal{L}(E, F)$ n'existe pas.

e) Vrai. $u \in \mathcal{L}(E)$ est un isomorphisme si, et seulement si, $\det((u) \neq 0$.

f) Faux. Si $\dim(E) = \dim(F)$, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est un isomorphisme si, et seulement si, une matrice qui le représente (relativement à des bases de E et F est inversible. On peut décider l'inversibilité de cette matrice avec son déterminant.

g) Faux. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est une matrice inversible, donc une matrice de passage, et son déterminant est 2.

h) Vrai. Une matrice est inversible si, et seulement si, son déterminant est non nul. Comme $\det(A^T) = \det(A)$, A est inversible si, et seulement si, A^T est inversible.

i) Vrai. $\det(A^2) = \det(A)^2$ donc $\det(A^2) = 1 \iff \det(A)^2 = 1 \iff \det(A) \in \{-1; 1\}$.

j) Vrai. Deux matrices semblables représentent le même endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ dans deux bases différentes, le calcul du déterminant d'un endomorphisme ne dépend pas du choix de la base.

1 Applications directes du cours

Exercice n° 2

$$\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 31 \quad ; \quad \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 5 \\ 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 72 \quad ; \quad \begin{vmatrix} -3 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & -2 & 5 \\ 3 & 4 & -4 & \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 633$$

Exercice n° 3

— $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix} = -28 \neq 0$ donc $((1;3;2)\ ;\ (2;5;0)\ ;\ (7;7;7))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

— Dans $\mathbb{R}_2[X]$, on travaille dans la base $(P, X, 1)$ (c'est une famille échelonnée et donc libre de 3 vecteurs, c'est une donc bien une base). La matrice de la famille $(P; XP'; X^2P'') = (P; 4X^2 + 3X; 4X^2) = (P, 2P - 3X + 2; 2P - 6X + 2)$ est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ et son déterminant vaut $6 \neq 0$ donc la famille est une base.

— Dans $\mathbb{C}^3$: $(u(\pi; 3; \sqrt{2})\ ;\ v(\pi + \mathrm{i}; 3 + \mathrm{i}; \sqrt{2} + \mathrm{i})\ ;\ w(7\mathrm{i}; 7\mathrm{i}; 7\mathrm{i}))$ est liée car $v = u + \frac{\mathrm{i}}{7}w$.

— $(3X^3 + X^2 - 5X + 1\ ;\ 2X^3 + 7X^2 - 4\ ;\ X^2 + 5X)$ ne comporte que 3 vecteurs, ça ne peut donc pas être une famille génératrice de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice n° 4

— Une symétrie est toujours un automorphisme.

— Soit $f : P \mapsto (X^2 + X - 1)P'' + P$. $\mathrm{Mat}_{\mathrm{can}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ donc $\det(f) = 3 \neq 0$ et f est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

— Soit $f : M \mapsto 2M - M^T$. On rappelle la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$: $(E_{1,1}; E_{1,2}; E_{2,1}; E_{2,2})$. On a : $\mathrm{Mat}_{\mathrm{can}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $\det(f) = 3 \neq 0$ et f est un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

2 Un peu plus dur

Exercice n° 5

— On développe par rapport à la première ligne et on a :

$$\begin{vmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & n \\ n-1 & 0 & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 2 & 0 & 2 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} n \begin{vmatrix} n-1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \ddots \\ & & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} n!$$

— On développe selon les colonnes, de la dernière à la troisième (et, comme les seuls coefficients non-nuls sont diagonaux, leur coefficient est $+1$). On a :

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & x \end{vmatrix} = x^{n-2} \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix} = x^{n-2}(x^2 - 1)$$

— On fait des opérations sur les lignes : pour i allant de 1 à $n-1$, $L_i \leftarrow L_i - L_{i+1}$ et on a :

$$D_n = \begin{vmatrix} n & n & \dots & \dots & n \\ n & n-1 & \dots & & n-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 2 & 2 \\ n & n-1 \dots & & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ n & \dots & & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la première colonne et on a :

$$D_n = (-1)^{n+1} n = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ & \ddots & \vdots \\ (0) & & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} n$$

Exercice n° 6

1.
$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & t & t^2 & t^3 \end{vmatrix} \underset{C_4 \leftarrow C_4 - xC_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & 0 \\ 1 & y & y^2 & y^2(y-x) \\ 1 & z & z^2 & z^2(z-x) \\ 1 & t & t^2 & t^2(t-x) \end{vmatrix} \underset{C_3 \leftarrow C_3 - xC_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & y & y(y-x) & y^2(y-x) \\ 1 & z & z(z-x) & z^2(z-x) \\ 1 & t & t(t-x) & t^2(t-x) \end{vmatrix}$$

$$\underset{C_2 \leftarrow C_2 - xC_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & y-x & y(y-x) & y^2(y-x) \\ 1 & z-x & z(z-x) & z^2(z-x) \\ 1 & t-x & t(t-x) & t^2(t-x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y-x & y(y-x) & y^2(y-x) \\ z-x & z(z-x) & z^2(z-x) \\ t-x & t(t-x) & t^2(t-x) \end{vmatrix}$$

$$= -(y-x)(z-x)(t-x) \begin{vmatrix} 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \\ 1 & t & t^2 \end{vmatrix} \underset{\text{après calculs}}{=} (t-x)(z-x)(y-x)(t-y)(t-x)(t-z)$$

2. Par récurrence, on montre que $D_n = \prod_{1\leq i<q\leq j} (x_j - x_i)$.

Exercice n° 7

1. $\chi_A = (1-\lambda)(4-\lambda) - 6 = \lambda^2 - 5\lambda - 2$.
2. Le spectre de A est $\{r_1 = \frac{5-\sqrt{33}}{2}\ ;\ r_2 = \frac{5+\sqrt{33}}{2}\}$
3. Soit r une valeur propre. $A - rI_2$ a un déterminant nul, cela signifie que l'endomorphisme $f - r\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$ n'est pas un automorphisme et donc il n'est pas injectif. Il existe donc un vecteur non nul e_r tel que $f(e_r) - re_r = 0_{\mathbb{R}^2} \iff f(e_r) = re_r$.
4. Trouvons les vecteurs e_r qui conviennent pour nos deux valeurs propres en résolvant un système.Pour $r \in \{\frac{5-\sqrt{33}}{2}; \frac{5+\sqrt{33}}{2}\}$, on cherche $e_r(x;y)$ tel que $f(x;y) = r(x;y) \iff A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. On sait qu'il y a une infinité de solutions (par linéarité, $\mathrm{Vect}(e)$ vérifie la condition) et on peut imposer la contrainte $y = 1$ (car $(1;0)$ ne convient pas). On a donc :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{l} x + 2 = rx \\ 3x + 4 = r \end{array} \right. \implies x = \frac{2}{r-1}$$

On a donc $e_1 = (\frac{2}{r_1-1}; 1)$ et $e_2 = (\frac{2}{r_2-1}; 1)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, ils forment donc une base de $\mathbb{R}^2$. Dans cette base, la matrice de f est $\begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}$.

3 Démontrer les résultats du cours et exercices théoriques

Exercice n° 8

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F et G deux SEV supplémentaires et u la symétrie par rapport à F et parallèlement à G. Soit B, une base de E adaptée à la somme $E = F \oplus G$. La matrice de u dans B est diagonale avec des 1 (vecteurs de F) ou des -1 (vecteurs de G) sur la diagonale. $\det(u)$ est le produit des termes diagonaux, c'est donc ± 1 selon le nombre de -1, c'est-à-dire selon la dimension de G.

La réciproque est fausse. Comme contre-exemple, on peut considérer l'application linéaire canoniquement associée à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a pour déterminant 1 mais n'est pas une symétrie puisque $A^2 \neq I_2$.

Exercice n° 9

Prouver que $\det(f \circ g) = \det(f)\det(g)$ pour des endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie revient à prouver que $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ pour des matrices carrées. Prenons ce point de vue. Notons $A_1, \dots A_n$ et $B_1, \dots, B_n$ les colonnes de A et de B identifiées à des éléments de $\mathbb{K}^n$.
Considérons l'application ϕ qui, associe à toute famille $(C_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ de vecteurs-colonnes de $\mathbb{K}^n$ le scalaire $\det_{can}(AC_1, \dots, AC_n)$.
On vérifie aisément que ϕ est n-linéaire et alternée, on en déduit que ϕ est un multiple de $\det_{can}$.
En évaluant ϕ sur la base canonique, on a : $\phi(B_{can}) = \det_{can}(A_1, \dots, A_n) = \det(A)$ et donc $\phi = \det(A)\det_{can}$.
On évalue sur la famille $(B_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ et on a : $\phi(B_1, \dots, B_n) = \det(A)\det_{can}(B_1, \dots, B_n) = \det(A)\det(B)$.
Or, $\phi(B_1, \dots, B_n) = \det_{can}(AB_1, \dots, AB_n) = \det(AB)$.

4 Plus difficile...

Exercice n° 10

En développant par rapport à la première colonne puis la première ligne, on obtient a une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 sur la suite (D_n) : $\forall n \geq 1,\ D_{n+2} = 3D_{n+1} - 2D_n$. (On est parti de D_{n+2} plutôt que de D_n pour ne pas demander $n \geq 3$).

On calcule le polynôme caractéristique puis on déduit que $(D_n)_n \in \mathrm{Vect}((2^n)_n, (1)_n)$.

À l'aide des premiers termes de $(D_n)_n$ on trouve que : $\forall n \geq 1,\ D_n = 2^{n+1} - 1$.