Correction des exercices du chapitre 22

Exercice n° 1

a) Faux. ϕ n'est pas défini. Par exemple, si on considère la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ x(x-1) & \text{sinon} \end{cases}$ est continue, non nulle mais on a $\phi(f,f) = 0$.

b) Faux. ϕ n'est pas défini. Par exemple, si on considère le polynôme $P = X(X-1)$, on a $\phi(P,P) = 0$.

c) Vrai. Dans un espace euclidien E, soit x un vecteur orthogonal à tous les vecteurs de E. On a en particulier $< x, x >= 0$ et donc $x = 0$ car le produit scalaire est défini.

d) Faux. ϕ n'est pas défini. Par exemple une variable aléatoire X qui suit une loi de Bernoulli avec une probabilité de succès qui vaut $p = 0$ vérifie $\phi(X,X) = E(X^2) = 0$ mais $X \neq 0$.

e) Vrai. Un espace euclidien est un espace préhilbertien de dimension finie.

f) Faux. $\mathcal{C}^0([0;1],\mathbb{R})$ est un espace-vectoriel de dimension finie. (On a vu des familles libres de cardinal infini).

g) Faux. Les produits scalaires permettent de définir des normes, dites *euclidiennes* mais on ne peut pas associer un produit scalaire à toutes les normes. Par exemple, la *norme infinie* dans $\mathbb{R}^2$ définie par $\|(x;y)\|_\infty = \max(x;y)$ n'est pas euclidienne car elle ne vérifie pas l'identité du parallélogramme.

h) Vrai. C'est la cours.

i) Vrai. Pour la preuve, procéder par double inclusion.

j) Vrai. C'est l'inégalité de Bessel.

1 Applications directes du cours

Exercice n° 2

C'est un exercice d'écriture fastidieux, il faut prouver que :

— ϕ est symétrique :

$$\forall ((x;y;z),(x';y';z')) \in (\mathbb{R}^3)^2,\ \phi((x;y;z),(x';y';z')) = \phi((x';y';z'),(x;y;z))$$

— ϕ est linéaire à gauche : $\forall ((x;y;z),(x';y';z'),A) \in (\mathbb{R}^3)^3,\ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,$

$$\phi(\lambda(x;y;z) + \mu(x';y';z')\ ,\ A) = \lambda\phi((x;y;z)\ ,\ A) + \mu\phi((x';y';z')\ ,\ A)$$

Par symétrie, on en déduit la linéarité à droite et donc la bilinéarité.

— ϕ est positif :

$$\forall A(x;y;z) \in \mathbb{R}^3,\ \phi(A,A) \geq 0$$

— ϕ est défini :

$$\forall A(x;y;z) \in \mathbb{R}^3,\ \phi(A,A) = 0 \Longrightarrow A = 0_{\mathbb{R}^3}$$

Seuls les caractères positif et défini présentent une difficulté. Vérifions, les :

$$\forall A(x;y;z) \in \mathbb{R}^3,\ \phi(A,A) = (x+y)^2 + 2y^2 + 5z^2$$

Une somme de carrés de réels est positifs donc ϕ est positif. Une somme de réels positifs est nulle si, et seulement si, ces réels sont tous nuls. On a donc :

$$\phi(A,A) + \Longrightarrow (x+y)^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \text{ et } z^2 = 0 \Longrightarrow x = 0 \text{ et } y = 0 \text{ et } z = 0$$

Exercice n° 3

Les trois applications proposées sont symétriques et bilinéaires. Vérifions si elles sont définies et positives. Pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]^2$, on a :

— $\phi(P,P) = \int_0^1 P(t)^2 \mathrm{d}t \geq 0$ et, puisque $t \mapsto P(t)$ est continue, on a égalité si, et seulement si, $P = 0$. Finalement, ϕ est bien un produit scalaire.

— $\psi(P,P) = \int_0^1 2P(t)P'(t)\mathrm{d}t = [P(t)^2]_0^1$. Pour $P = X - 1$, on a $\psi(P,P) = -1 < 0$ et donc ψ n'est pas un produit scalaire.

— $\xi(P,P)=\int_0^1 P'(t)^2\mathrm{d}t+P(0)^2\geq 0$. Si $\xi(P,P)=0$ c'est qu'on a $P'=0$ et donc P est constant. Mais on a aussi $P(0)^2=0$ donc $P=0$. Finalement, ξ définit bien un un produit scalaire.

Exercice n° 4

Dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel, on applique Cauchy-Scwharz aux vecteurs $X=(x_1;\ldots;x_n)$ et $Y=(1;\ldots;1)$. On a :

$$|<X;Y>|\leq \|X\|\times\|Y\| \iff |\sum_{i=1}^n x_i|\leq\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\times\sqrt{n} \iff \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2\leq n\sum_{i=1}^n x_i^2$$

Exercice n° 5

Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, notons $\mathcal{P}: x+y=0$. $\mathcal{P}^\perp=\mathrm{Vect}((1;1;0))$ et une base orthonormée de $\mathcal{P}^\perp$ est $\vec{v}=\frac{1}{\|(1;1;0)\|}(1;1;0)=\frac{1}{\sqrt{2}}(1;1;0)$.
La distance entre $\vec{u}(2;1;-3)$ et $\mathcal{P}$ est la norme du projeté orhogonal de $\vec{u}$ sur $\mathcal{P}^\perp$, c'est-à-dire :

$$\|<\vec{u};\vec{v}>\vec{v}\|=|<\vec{u};\vec{v}>|=\frac{3}{\sqrt{2}}$$

Exercice n° 6

1. $((3,2),(-1;0))$ est une famille de deux vecteurs non-colinéaires, c'est donc une famille libre. Comme cette famille est maximale, c'est une base de $\mathbb{R}^2$. On lui applique l'agorithme d'orthonormalisation de Gram Schmidt et on obtient : $(\frac{1}{\sqrt{13}}(3;2)\ ;\ \frac{2}{\sqrt{13}}(-2;3)$.
2. La matrice dont les colonnes sont les vecteurs $((1,3,2),(1,-1;0),(1,1,2))$ a pour rang 3, on en déduit que ces trois vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^3$. On lui applique l'agorithme d'orthonormalisation de Gram Schmidt et on obtient : $(\frac{1}{\sqrt{14}}(1;3;2)\ ;\ \frac{1}{\sqrt{21}}(4;-2;1)\ ;\ \frac{1}{\sqrt{6}}(-1;-1;2))$.

Exercice n° 7

On applique l'agorithme d'orthonormalisation de Gram Schmidt à la base canonique et on obtient des bases orthonormées, une pour chaque produit scalaire :

— Pour $<,>_1$: $(\frac{1}{\sqrt{3}}\ ;\ \frac{1}{\sqrt{2}}(X-1)\ ;\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2\times 73}}(X^2-2x-\frac{11}{3}))$

— Pour $<,>_2$: $(\frac{1}{\sqrt{2}}\ ;\ \sqrt{\frac{3}{2}}X\ ;\ \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}X^2-\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}})$

2 Un peu plus dur

Exercice n° 8

On travaille dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Il suffit de vérifier.
2. $\forall M\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ <M,I_2>=0\Leftrightarrow \mathrm{tr}(M)=0\Leftrightarrow M\in\mathrm{Vect}(E_{1,2}\ ;\ E_{2,1}\ ;\ E_{1,1}-E_{2,2})$.
On a donc $\{\mathrm{I}_2\}^\perp=\mathrm{Vect}(E_{1,2}\ ;\ E_{2,1}\ ;\ E_{1,1}-E_{2,2})$ qui est un sous-espace de dimension 3 (la famille étant libre).
3. Le sous-espace des matrices symétriques admet pour base $(E_{1,1}\ ;\ E_{2,2}\ ;\ E_{2,1}-E_{1,2})$. Pour obtenir une base orthonormée, il faut appliquer Gram-Schmidt à cette base. (Sera fait dans une MAJ du corrigé).

Exercice n° 9

Soit $x_1,\ldots,x_n$ une famille de réels strictement positifs dont la somme vaut 1. Dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel, on applique Cauchy-Scwharz aux vecteurs $X=(\sqrt{x_1};\ldots;\sqrt{x_n})$ et $Y=(\frac{1}{\sqrt{x_1}};\ldots;\frac{1}{\sqrt{x_n}})$. On a :

$$|<X;Y>|\leq\|X\|\times\|Y\| \iff n\leq\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i}\times\sqrt{\sum_{i=1}^n\frac{1}{x_i}} \iff n^2\leq\sum_{i=1}^n\frac{1}{x_i}$$

Exercice n° 10

On a $u \circ u = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_3[X]}$ et donc u est une symétrie de $\mathbb{R}_3[X]$.
Ses éléments caractéristiques sont $\ker(u - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_3[X]}) = \mathrm{Vect}(1; X^2)$ et $\ker(u + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_3[X]}) = \mathrm{Vect}(X; X^3)$. On vérifie que pour $P \in \{1; X^2\}$ et $Q \in \{X; X^3\}$ on a $< P; Q >= 0$, on en déduit que $\mathrm{Vect}(X; X^3)$ et $\mathrm{Vect}(1; X^2)$ sont des supplémentaires orthogonaux et que u est une symétrie orthogonale.

3 Démontrer les résultats du cours et exercices théoriques

Exercice n° 11

On travaille dans un espace préhilbertien réel E. On considère $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs.

1. Supposons que $\mathcal{F}$ est orthogonale : $\forall 1 \leq i, j \leq n,\ i \neq j \Rightarrow < x_i; x_j >= 0$. On a alors :

$$\| \sum_{i=1}^{n} x_i \|^2 =< \sum_{i=1}^{n} x_i; \sum_{j=1}^{n} x_j >= \sum_{1 \leq i,j \leq n} < x_i; x_j >= \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$$

2. La réciproque est fausse pour plus de deux vecteurs. Par exemple sur une droite vectorielle $\mathrm{Vect}(\vec{i})$, (avec $\vec{i}$ normé) prenons la famille de quatre vecteurs $(\vec{i}; \vec{i}; \vec{i}; -\vec{i})$.
On a $\|\vec{i} + \vec{i} + \vec{i} - \vec{i}\|^2 = \|2\vec{i}\|^2 = 4 = \|\vec{i}\|^2 + \|\vec{i}\|^2 + \|\vec{i}\|^2 + \| - \vec{i}\|^2$ mais la famille n'est pas orthogonale.

Exercice n° 12

Soit E l'espace vectoriel des suites nulles à-partir d'un certain rang.

1. Il suffit de vérifier (les suites sont nulles à partir d'un certain rang, cela garantit que $\sum u_n v_n$ converge : c'est une somme finie).
2. Soit $F = \{u \in E \ / \ \sum\limits_{n} u_n = 0\}$. Soit $u \in F^{\perp}$, non nulle notons m le plus grand indice tel que $u_m \neq 0$ (il existe car $u \neq 0$ et $u \in E$).
Soit v la suite qui vaut 0 sauf pour $u_m = 1$ et $u_{m+1} = -1$. Par construction, $v \in E$ et $v \in F$. Or, $< v, u >= u_m \neq 0$, c'est absurde. On en déduit que $F^{\perp} = \{0\}$.
3. $(F^{\perp})^{\perp} = \{0\}^{\perp} = E \neq F$ (car $(1; 0; 0; \dots) \in E \backslash F$).

Exercice n° 13

On procède par double implication.

— Supposons que p soit un projecteur orthogonal, c'est-à-dire la projection sur un sous-espace F parallèlement à $F^{\perp}$. Pour tous vecteurs $x = x_F + x_{F^{\perp}}$ et $y = y_F + y_{F^{\perp}}$:

$$< x, p(y) >=< x_F + x_{F^{\perp}}, y_F >=< x_F, y_F >=< p(x), y_F + y_{F^{\perp}} >=< p(x), y >$$

.

— Réciproquement, supposons que p soit un projecteur tel que $\forall (x, y) \in E^2,\ < x, p(y) > = < p(x), y >$, notons F et G les éléments caractéristiques de p, c'est-à-dire les SEV supplémentaires tels que p est la projection sur F parallèlement à G.
Soit $x \in F$ et $y \in G$. On a : $< x, y >=< p(x), y >=< x, p(y) >=< x, 0 >= 0$ donc $F \subset F^{\perp}$. Or, puisque E est de dimension finie et $F^{\perp}$ et G sont deux supplémentaires de F alors ils ont même dimension et donc sont égaux. Finalement, p est bien une projection orthogonale.

4 Plus difficile...

Exercice n° 14

$\forall k \in [\![1; n]\!],\ 1 = \|e_k\|^2 = \sum_{i=1}^{n} < e_k, e_i >^2 = 1 + \sum_{i \neq k} < e_k, e_i >^2$ donc, pour $i \neq k,\ < e_k, e_i >= 0$ et donc $(e_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ est orthogonale donc libre. Reste à montrer qu'elle est génératrice.
Raisonnons par l'absurde en supposant l'existence d'un vecteur x qui ne soit pas dans $\mathrm{Vect}(e_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$. On a alors $y = x - \sum_{i=1}^{n} < x, e_i > e_i$ qui est un vecteur non-nul de $\mathrm{Vect}(e_i)_{i \in [\![1;n]\!]}^{\perp}$. Si on applique à y la propriété de $(e_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ on a $\|y\|^2 = \sum_{i=1}^{n} < y, e_i >= 0$ donc $y = 0$ ce qui est absurde. Finalement, $(e_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ est génératrice donc c'est une base de E.

Exercice n° 15

On se place dans $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $< P, Q >= \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\ \mathrm{d}x$.

Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\int_{-1}^{1}(x^2 - ax - b)^2\mathrm{d}x = \|X^2 - (aX+b)\|^2$ et donc $\mathrm{Inf}\left\{\displaystyle\int_{-1}^{1}(x^2 - ax - b)^2\mathrm{d}x\ /\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$ est le carré de la distance entre X^2 et $\mathbb{R}_1[X]$.

Après quelques calculs, on trouve que cette valeur est $\frac{8}{45}$