Chapitre 2 - Calculer dans $\mathbb{C}$ - Exercices

Exercice n° 1

VRAI ou FAUX sur l'ensemble du chapitre.

a) i est l'unique complexe dont le carré vaut -1.

b) Il existe un complexe dont le carré vaut -2.

c) L'inverse d'un complexe non réel est un complexe non réel.

d) Soit z un complexe non réel. Les points $A(z)$, $B(\overline{z})$ et $C(-z)$ ne sont pas alignés.

e) Soit z un complexe non nul. Les vecteurs d'affixes complexes z et $\mathrm{i}z$ sont colinéaires.

f) Soit r, ρ, θ, ϕ des réels. $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ si, et seulement si, $r = \rho$ et $\theta = \phi$.

g) Les imaginaires purs sont les complexes dont l'argument principal est $\pm\frac{\pi}{2}$.

h) Soit z un complexe non nul. Si $\mathrm{Arg}(z^2) = \mathrm{Arg}(z)$ alors z est un réel.

i) i^{2021} est imaginaire pur.

j) On peut se servir des complexes pour prouver qu'un triangle du plan est rectangle.

1 Formes algébrique et exponentielle, applications directes du cours

Exercice n° 2

Donner les formes algébriques, puis les modules des complexes suivants :

$$z_1 = \frac{1}{\mathrm{i}} \quad ; \quad z_2 = \frac{5-\mathrm{i}}{3\mathrm{i}+1} \quad ; \quad z_3 = 1 + \frac{7-\mathrm{i}}{2+\sqrt{3}\mathrm{i}} \quad ; \quad z_4 = \frac{1}{(1-\mathrm{i})^3}$$

Exercice n° 3

1. Donner la forme exponentielle des complexes suivants :

$$z_1 = -8\mathrm{i} \qquad z_2 = (1+\mathrm{i})^3 \qquad z_3 = 13 - 5\mathrm{i} \qquad z_4 = \frac{1}{3\mathrm{i}-\sqrt{3}}$$

2. Donner la forme algébrique du complexe $7\mathrm{e}^{0,3\mathrm{i}}$.

Exercice n° 4

1. Linéariser l'expression $\sin^4(x)$ (pour $x \in \mathbb{R}$).
2. Pour $x \in \mathbb{R}$ exprimer $\sin(5x)$ en fonction de $\cos(x)$ et de $\sin(x)$.
3. Pour $x \in \mathbb{R}$, exprimer sous forme d'un produit $\cos(x) - \cos(5x)$.

Pour s'exercer en autonomie : fiches 16 et 17 du Cahier de Calcul.

2 Un peu plus difficile

Exercice n° 5

Soit le complexe $j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. Calculer $1 + j + j^2$. En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{2022} j^k$.

Exercice n° 6

Soit les points A, B, C, d'affixes respectives $a = 2\mathrm{i}$, $b = 2 + \mathrm{i}$ et $c = 6 - \mathrm{i}$.
Montrer que A, B, C sont alignés.

Exercice n° 7

Résoudre les équations $(E_1)\ :\ z^2 - 3\overline{z} = 1$ et $(E_2)\ :\ |1 - z + 3\mathrm{i}| = |\mathrm{i}z + 4|$.

Exercice n° 8

Soit $t \in [0; 2\pi[$. Donner le module et l'argument principal de $1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$.

Exercice n° 9

Soit a, b, c trois complexes non nuls de même module. Montrer que $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$ est un réel de $[-8; 8]$.

3 Plus difficile

Exercice n° 10

Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ du plan complexe tel que $\dfrac{z - \mathrm{i}}{z - 1}$ est réel.

Exercice n° 11

Soit z un complexe de module 1. Calculer $|1 + z|^2 + |1 - z|^2$.

Exercice n° 12

On travaille dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On appelle A et B les points d'affixes respectives -1 et 1.
Soit un complexe $z \neq 0; 1; -1$, on appelle M, N et P les points d'affixes respectives z, z^2 et z^3.

1. Prouver que M, N et P sont distincts deux-à-deux.
2. On se propose, dans cette question, de déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que le triangle MNP soit rectangle en P
   a) Prouver que MNP est rectangle en P si et seulement si : $|z + 1|^2 + |z|^2 = 1$.
   b) Montrer que :
   $$|z+1|^2 + |z|^2 = 1 \iff \left(z + \frac{1}{2}\right)\left(\overline{z + \frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{4}$$
   On pourra montrer que les deux équations sont équivalentes à une troisième équation.
   c) En déduire que MNP est rectangle si et seulement si $M(z)$ appartient à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.