

Chapitre 2 - Calculer dans \mathbb{C} - Exercices

Exercice n° 1

VRAI ou FAUX sur l'ensemble du chapitre.

- i est l'unique complexe dont le carré vaut -1 .
- Il existe un complexe dont le carré vaut -2 .
- L'inverse d'un complexe non réel est un complexe non réel.
- Soit z un complexe non réel. Les points $A(z)$, $B(\bar{z})$ et $C(-z)$ ne sont pas alignés.
- Soit z un complexe non nul. Les vecteurs d'affixes complexes z et iz sont colinéaires.
- Soit r, ρ, θ, ϕ des réels. $re^{i\theta} = \rho e^{i\phi}$ si, et seulement si, $r = \rho$ et $\theta = \phi$.
- Soit z un complexe non nul. Si $\text{Arg}(z^2) = \text{Arg}(z)$ alors z est un réel.
- i^{2021} est imaginaire pur.
- On peut se servir des complexes pour prouver qu'un triangle du plan est rectangle.

1 Formes algébrique et exponentielle, applications directes du cours

Exercice n° 2

Donner les formes algébriques, puis les modules des complexes suivants :

$$z_1 = \frac{1}{i} \quad ; \quad z_2 = \frac{5-i}{3i+1} \quad ; \quad z_3 = 1 + \frac{7-i}{2+\sqrt{3}i} \quad ; \quad z_4 = \frac{1}{(1-i)^3}$$

Exercice n° 3

1. Donner la forme exponentielle des complexes suivants :

$$z_1 = -8i \quad z_2 = (1+i)^3 \quad z_3 = 13 - 5i \quad z_4 = \frac{1}{3i - \sqrt{3}}$$

2. Donner la forme algébrique du complexe $7e^{0,3i}$.

Exercice n° 4

- Linéariser l'expression $\sin^4 x$ (pour $x \in \mathbb{R}$).
- Pour $x \in \mathbb{R}$ exprimer $\sin(5x)$ en fonction de $\cos x$ et de $\sin x$.
- Pour $x \in \mathbb{R}$, exprimer sous forme d'un produit $\cos x - \cos 5x$.

Pour s'exercer en autonomie : fiches 16 et 17 du Cahier de Calcul.

2 Un peu plus difficile

Exercice n° 5

Soit le complexe $j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. Calculer $1 + j + j^2$. En déduire $\sum_{k=0}^{2019} j^k$.

Exercice n° 6

Soit les points A, B, C , d'affixes respectives $a = 2i$, $b = 2 + i$ et $c = 6 - i$. Montrer que A, B, C sont alignés.

Exercice n° 7

Résoudre les équations $(E_1) : z^2 - 3\bar{z} = 1$ et $(E_2) : |1 - z + 3i| = |iz + 4|$.

Exercice n° 8

Soit $t \in [0; 2\pi]$. Donner le module et un argument de $1 + e^{it}$.

Exercice n° 9

Soit a, b, c trois complexes (non nuls) de même module. Montrer que $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$ est réel.

3 Plus difficile

Exercice n° 10

Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ du plan complexe tel que $\frac{z-i}{z-1}$ est réel.

Exercice n° 11

Soit z un complexe de module 1. Calculer $|1+z|^2 + |1-z|^2$.

Exercice n° 12

On travaille dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On appelle A et B les points d'affixes respectives -1 et 1 .

Soit un complexe $z \neq 0; 1; -1$, on appelle M, N et P les points d'affixes respectives z, z^2 et z^3 .

1. Prouver que M, N et P sont distincts deux-à-deux.
2. On se propose, dans cette question, de déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que le triangle MNP soit rectangle en P
 - a) Prouver que MNP est rectangle en P si et seulement si : $|z+1|^2 + |z|^2 = 1$.
 - b) Montrer que :

$$|z+1|^2 + |z|^2 = 1 \iff \left(z + \frac{1}{2}\right) \left(\overline{z + \frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{4}$$

On pourra montrer que les deux équations sont équivalentes à une troisième équation.

- c) En déduire que MNP est rectangle si et seulement si $M(z)$ appartient à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.