

Correction des exercices du chapitre 2

Exercice n° 1

- a) Faux. $(-i)^2 = -1$.
- b) Vrai. $(i\sqrt{2})^2 = -2$.
- c) Vrai. Soit z un complexe non réel. z est non nul, il a un argument principal $\text{Arg}(z) \in]-\pi; \pi[\setminus \{0\}$ et $\text{Arg}(\frac{1}{z}) = -\text{Arg}(z) \notin \{0; \pi\}$ donc $\frac{1}{z}$ est un complexe non réel.
- d) Faux. Si $z = i$. Les points $A(z)$, $B(\bar{z})$ et $C(-z)$ ne sont pas alignés (B et C sont confondus).
- e) Faux. Si $Z = i$, le vecteur d'affixe complexes z est vertical et celui d'affixe $iz = -1$ est horizontal; ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.
La colinéarité des vecteurs est équivalente à la proportionnalité de leurs coordonnées cartésiennes réelles, c'est-à-dire à ce que leurs affixes complexes soient proportionnelles avec un coefficient de proportionnalité réel.
- f) Faux. $e^{i0} = e^{i2\pi}$ mais $0 \neq 2\pi$.
- g) Faux. 0 est imaginaire pur mais n'a pas d'argument.
- h) Vrai. Soit z un complexe non nul, notons $\theta = \text{Arg}(z)$. On a $\text{Arg}(z^2) = \text{Arg}(z) \iff \theta = 2\theta + 2K\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) $\iff \theta = 2\theta + 2K\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) $\iff \theta = 2K\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) $\iff z \in \mathbb{R}^*$.
- i) Vrai : $i^{2021} = (e^{i\frac{\pi}{2}})^{2021} = e^{i\frac{2021\pi}{2}} = e^{i\frac{2020+1}{2}\pi} = e^{i(505 \times 2\pi + \frac{\pi}{2})} = e^{i505 \times 2\pi} \times e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$.
- j) Vrai. On peut calculer des longueurs et mesurer des angles avec les nombres complexes, donc on peut se servir des complexes pour prouver qu'un triangle du plan est rectangle.

1 Formes algébrique et exponentielle, applications directes du cours

Exercice n° 2

On a : $z_1 = -i$ et $|z_1| = 1$; $z_2 = \frac{(5-i)(-3i+1)}{10} = \frac{1}{5} + i\frac{-8}{5}$ et $|z_2| = \sqrt{(\frac{1}{5})^2 + (-\frac{8}{5})^2} = \sqrt{\frac{13}{5}}$
 $z_3 = 1 + \frac{(7-i)(2-\sqrt{3}i)}{7} = 3 - \frac{\sqrt{3}}{7} + i(-\frac{2}{7} - \sqrt{3})$ et $|z_3| = \sqrt{\text{Re}(z_3)^2 + \text{Im}(z_3)^2} = \sqrt{12 + \frac{1}{7} - \frac{2\sqrt{3}}{7}}$
 $z_4 = \frac{1}{(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}})^3} = \frac{1}{2\sqrt{2}}e^{i\frac{3\pi}{4}} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$ et $|z_4| = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Exercice n° 3

1. Pour les deux premiers complexes, on se sert des formes exponentielles de -1 , i et $1+i$:

$$z_1 = 8e^{-i\frac{\pi}{2}} \text{ et } z_2 = (\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^3 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

Pour z_3 , on calcule le module puis on factorise :

$$|z_3| = |13 - 5i| = \sqrt{194} \text{ et } z_3 = \sqrt{194} \left(\frac{13}{\sqrt{194}} + i\frac{-5}{\sqrt{194}} \right)$$

Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\cos(\theta) = \frac{13}{\sqrt{194}}$ et $\sin(\theta) = \frac{-5}{\sqrt{194}}$. La forme exponentielle de z_3 est $\sqrt{194}e^{i\theta}$.
 $|3i - \sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$ et donc $3i - \sqrt{3} = 2\sqrt{3}(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2\sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{3}}$. On en déduit $z_4 = \frac{1}{3i - \sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

2. Donner une forme algébrique à partir d'une forme exponentielle est aisé, il suffit d'utiliser la définition de l'exponentielle complexe : $7e^{0,3i} = 7\cos(0,3) + i\sin(0,3)$.

Exercice n° 4

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \sin^4(x) = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^4 = \frac{1}{16} (e^{i4x} - 4e^{i2x} + 6 - 4e^{-i2x} + e^{i4x}) = \frac{1}{8} \cos(4x) - \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{3}{8}$.

2. $\forall x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sin(5x) = \text{Im}(e^{i5x}) = \text{Im}((e^{ix})^5) = \text{Im}((\cos(x) + i \sin(x))^5) = 5 \cos^4(x) \sin(x) - 10 \cos^2(x) \sin^3(x) + \sin^5(x)$$

3. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \cos(x) - \cos(5x) &= \text{Re}(e^{ix}) - \text{Re}(e^{i5x}) = \text{Re}(e^{i3x}e^{-i2x} - e^{i3x}e^{i2x}) = \text{Re}(e^{i3x}(e^{-i2x} - e^{i2x})) \\ &= \text{Re}(-2i \sin(2x)e^{i3x}) = -2 \sin(2x) \text{Re}(ie^{i3x}) = 2 \sin(2x) \sin(3x). \end{aligned}$$

2 Un peu plus difficile

Exercice n° 5

$1 + j + j^2 = 0$ on en déduit : $1 + j + j^2 + j^3 + j^4 + j^5 + \dots = \underbrace{1 + j + j^2}_{=0} + \underbrace{j^3 + j^4 + j^5}_{=j^3 \times 0 = 0} + \dots$

Comme $2022 = 3 \times 674$, on a :

$$\sum_{k=0}^{2022} j^k = \sum_{l=0}^{673} j^{3l} (1 + j + j^2) + j^{2022} = j^{2022}$$

Enfin, $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ donc $j^{2022} = e^{i2\pi \times 674} = 1$.

Exercice n° 6

Le vecteur \overrightarrow{AB} a pour affixe complexe $b - a = 2 - i$ et le vecteur \overrightarrow{AC} a pour affixe complexe $c - a = 6 - 3i = 3(2 - i)$. Les affixes des vecteurs sont proportionnelles, on en déduit que les vecteurs sont colinéaires et les points A, B, C sont alignés.

Exercice n° 7

Résolvons $(E_1) : z^2 - 3\bar{z} = 1$.

Soit $z \in \mathbb{C}$, on note $a = \text{Re}(z)$ et $b = \text{Im}(z)$. On a :

$$(E_1) \iff (a + ib)^2 - 3(a - ib) = 1 \iff a^2 - 3a - b^2 + i(2ab + 3b) = 1$$

Par unicité de la forme algébrique on a : $(E_1) \iff a^2 - 3a - b^2 = 1$ et $b(2a + 3) = 0$.

On a donc $b = 0$ ou $a = -\frac{3}{2}$.

— Si $b = 0$, $(E_1) \iff a^2 - 3a - 1 = 0 \iff a \in \left\{ \frac{3 - \sqrt{13}}{2}; \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \right\}$.

— Si $a = -\frac{3}{2}$, $(E_1) \iff \frac{9}{4} + \frac{9}{2} - b^2 = 1 \iff b^2 = \frac{23}{4} \iff b \in \left\{ \frac{\sqrt{23}}{2}; -\frac{\sqrt{23}}{2} \right\}$.

Finalement, l'ensemble des solutions de (E_1) est $\left\{ \frac{3 - \sqrt{13}}{2}; \frac{3 + \sqrt{13}}{2}; -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{23}}{2}; -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{23}}{2} \right\}$.

Résolvons (E_2) . Soit $z \in \mathbb{C}$, M son image dans le plan complexe. On a :

$$(E_2) : |1 - z + 3i| = |iz + 4| \iff |1 + 3i - z| = |z - 4i|$$

Soit les points $A(1 + 3i)$ et $B(4i)$, interprétons (E_2) en termes de distances : $(E_2) \iff AM = BM$ et donc (E_2) est satisfaite si, et seulement si, M est sur la médiatrice du segment $[AB]$.

Trouvons la forme des affixes des points de cette droite.

La médiatrice (d) du segment $[AB]$ est la droite orthogonale à (AB) qui passe par C , le milieu de $[AB]$. On a $z_C = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{1 + 7i}{2}$.

Un vecteur directeur de (d) est \overrightarrow{AB} d'affixe complexe $z_B - z_A = i - 1$ et donc de coordonnées cartésiennes $(-1; 1)$. On en déduit que $\overrightarrow{w}(1; 1)$ est orthogonal à \overrightarrow{AB} et donc directeur de (d) .

Les points de (d) ont donc une affixe complexe de la forme $z = z_C + tz_{\overrightarrow{w}} = \frac{1+2t+i(7+2t)}{2}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Finalement, l'ensemble des solutions de (E_2) est $\left\{ \frac{1+2t+i(7+2t)}{2} / t \in \mathbb{R} \right\}$.

Remarque : $z = \frac{1+t+i(7+t)}{2}$ est également correct, pourquoi ?

Exercice n° 8

Soit $t \in [0; 2\pi[$. On a : $1 + e^{it} = e^{i\frac{t}{2}} \left(e^{-i\frac{t}{2}} + e^{i\frac{t}{2}} \right) = e^{i\frac{t}{2}} 2 \cos\left(\frac{t}{2}\right)$.

— Si $0 \leq t \leq \pi$: alors $\cos\left(\frac{t}{2}\right) \geq 0$ et $2 \cos\left(\frac{t}{2}\right) e^{i\frac{t}{2}}$ est la forme exponentielle de $1 + e^{it}$. On en déduit que son module est $2 \cos\left(\frac{t}{2}\right)$ et que son argument principal est $\frac{t}{2}$.

— Si $\pi < t < 2\pi$: alors $\cos\left(\frac{t}{2}\right) < 0$ et la forme exponentielle de $1 + e^{it}$ est $-2 \cos\left(\frac{t}{2}\right) e^{i\left(\frac{t}{2} + \pi\right)}$. Son module est donc $-2 \cos\left(\frac{t}{2}\right)$, un de ses arguments est $\frac{t}{2} + \pi$ et son argument principal est $\frac{t}{2} - \pi$.

Exercice n° 9

Soit a, b, c trois complexes (non nuls) de même module. Ils sont donc de la forme $a = re^{i\theta}$, $b = re^{i\phi}$ et $c = re^{i\psi}$ avec $(r; \theta; \phi; \psi) \in \mathbb{R}^{+*} \times]-\pi; \pi]^3$. On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} &= \frac{(e^{i\theta} + e^{i\phi})(e^{i\phi} + e^{i\psi})(e^{i\psi} + e^{i\theta})}{e^{i(\theta+\phi+\psi)}} \\ &= \frac{e^{i\frac{\theta+\phi}{2}} 2 \cos\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right) e^{i\frac{\phi+\psi}{2}} 2 \cos\left(\frac{\phi-\psi}{2}\right) e^{i\frac{\psi+\theta}{2}} 2 \cos\left(\frac{\psi-\theta}{2}\right)}{e^{i(\theta+\phi+\psi)}} \\ &= 8 \cos\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi-\psi}{2}\right) \cos\left(\frac{\psi-\theta}{2}\right) \end{aligned}$$

Finalement, $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$ est un nombre réel et, puisque $\forall x \in \mathbb{R}, |\cos(x)| \leq 1$, ce nombre est dans $[-8; 8]$.

Ces bornes sont-elles atteintes ?

3 Plus difficile

Exercice n° 10

Soit $M(z = x + iy)$ dans le plan complexe (avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$). $\frac{z-i}{z-1}$ est réel si, et seulement si sa partie

imaginaire est nulle. On a : $\text{Im}\left(\frac{z-i}{z-1}\right) = \text{Im}\left(\frac{(x+i(y-1))(x+1-iy)}{|z-1|^2}\right)$ et donc $\frac{z-i}{z-1} \in \mathbb{R} \iff y = 1 + x$.

Finalement, l'ensemble des points cherchés est la droite d'équation $y = 1 + x$.

Exercice n° 11

Soit z un complexe de module 1, $z = e^{i\theta}$. En utilisant l'angle moitié, on trouve $|1+z|^2 + |1-z|^2 = 4$.

Exercice n° 12

1. $M = N$ correspond à $z = z^2 \iff z \in \{0; 1\}$ ce qui est exclu car $z \notin \{0; 1; -1\}$. De façon analogue, $M = P$ et $N = P$ sont faux.

Finalement, M, N et P sont distincts deux-à-deux.

2. a) D'après le théorème de Pythagore, MNP est rectangle en P si et seulement si $PM^2 + PN^2 = NP^2$. On a :

$$\begin{aligned} PM^2 + PN^2 = NP^2 &\iff |z^3 - z|^2 + |z^3 - z^2|^2 = |z^2 - z|^2 \\ &\iff |z|^2|z - 1|^2|z + 1|^2 + |z|^4|z + 1|^2 = |z|^2|z - 1|^2 \\ &\iff |z + 1|^2 + |z|^2 = 1 \end{aligned}$$

Comment justifier la dernière équivalence ?

- b) On a d'une part :

$$\begin{aligned} |z + 1|^2 + |z|^2 = 1 &\iff (z + 1)\overline{(z + 1)} + z\bar{z} = 1 \\ &\iff 2z\bar{z} + z + \bar{z} = 0 : (\star) \end{aligned}$$

Et d'autre part : $(z + \frac{1}{2})\overline{(z + \frac{1}{2})} = \frac{1}{4} \iff z\bar{z} + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\bar{z} = 0 \iff (\star)$.

On a donc bien $|z + 1|^2 + |z|^2 = 1 \iff (z + \frac{1}{2})\overline{(z + \frac{1}{2})} = \frac{1}{4}$

- c) Posons $Z = z + \frac{1}{2}$. D'après les questions précédentes, En déduire que MNP est rectangle si et seulement si $Z\bar{Z} = \frac{1}{4} \iff |Z| = \frac{1}{2} \iff |z + \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire si, et seulement si, $M(z)$ appartient au cercle de centre $A(-\frac{1}{2})$ et de rayon $\frac{1}{2}$.