Correction des exercices du chapitre 2

Exercice n° 1

a) Faux. $(-\mathrm{i})^2 = -1$.

b) Vrai. $(\mathrm{i}\sqrt{2})^2 = -2$.

c) Vrai. Soit z un complexe non réel. z est non nul, il a un argument principal $\mathrm{Arg}(z) \in]-\pi;\pi[\setminus\{0\}$ et $\mathrm{Arg}(\frac{1}{z}) = -\mathrm{Arg}(z) \notin \{0;\pi\}$ donc $\frac{1}{z}$ esr un complexe non réel.

d) Faux. Si $z = \mathrm{i}$. Les points $A(z)$, $B(\overline{z})$ et $C(-z)$ ne sont pas alignés (B et C sont confondus).

e) Faux. Si $Z = \mathrm{i}$, le vecteur d'affixe complexes z est vertical et celui d'affixe $\mathrm{i}z = -1$ est horizontal ; ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.
La colinéarité des vecteurs est équivalente à la proportionnalité de leurs coordonnées cartésiennes réelles, c'est-à-dire à ce que leurs affixes complexes soient proportionnelles avec un coefficient de proportionnalité réel.

f) Faux. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}0} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi}$ mais $0 \neq 2\pi$.

g) Faux. 0 est imaginaire pur mais n'a pas d'argument.

h) Vrai. Soit z un complexe non nul, notons $\theta = \mathrm{Arg}(z)$. On a $\mathrm{Arg}(z^2) = \mathrm{Arg}(z) \iff \theta = 2\theta + 2K\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \iff \theta = 2\theta + 2K\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \iff \theta = 2K\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \iff z \in \mathbb{R}^*$.

i) Vrai : $\mathrm{i}^{2021} = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}})^{2021} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2021\pi}{2}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2020+1}{2}\pi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(505\times 2\pi + \frac{\pi}{2})} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}505\times 2\pi} \times \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i}$.

j) Vrai. On peut calculer des longueurs et mesurer des angles avec les nombres complexes, donc on peut se servir des complexes pour prouver qu'un triangle du plan est rectangle.

1 Formes algébrique et exponentielle, applications directes du cours

Exercice n° 2

On a : $z_1 = -\mathrm{i}$ et $|z_1| = 1$; $z_2 = \frac{(5-\mathrm{i})(-3\mathrm{i}+1)}{10} = \frac{1}{5} + \mathrm{i}\frac{-8}{5}$ et $|z_2| = \sqrt{(\frac{1}{5})^2 + (-\frac{8}{5})^2} = \sqrt{\frac{13}{5}}$
$z_3 = 1 + \frac{(7-\mathrm{i})(2-\sqrt{3}\mathrm{i})}{7} = 3 - \frac{\sqrt{3}}{7} + \mathrm{i}(-\frac{2}{7} - \sqrt{3})$ et $|z_3| = \sqrt{\mathrm{Re}(z_3)^2 + \mathrm{Im}(z_3)^2} = \sqrt{12 + \frac{1}{7} - \frac{2\sqrt{3}}{7}}$
$z_4 = \frac{1}{(\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}})^3} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\mathrm{i}$ et $|z_4| = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Exercice n° 3

1. Pour les deux premiers complexes, on se sert des formes exponentielles de -1, i et $1+\mathrm{i}$:

$$z_1 = 8\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} \text{ et } z_2 = (\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}})^3 = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$$

Pour z_3, on calcule le module puis on factorise :

$$|z_3| = |13 - 5\mathrm{i}| = \sqrt{194} \text{ et } z_3 = \sqrt{194}\left(\frac{13}{\sqrt{194}} + \mathrm{i}\frac{-5}{\sqrt{194}}\right)$$

Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\cos(\theta) = \frac{13}{\sqrt{194}}$ et $\sin(\theta) = \frac{-5}{\sqrt{194}}$. La forme exponentielle de z_3 est $\sqrt{194}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.
$|3\mathrm{i}-\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$ et donc $3\mathrm{i}-\sqrt{3} = 2\sqrt{3}(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$. On en déduit $z_4 = \frac{1}{3\mathrm{i}-\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$.

2. Donner une forme algébrique à partir d'une forme exponentielle est aisé, il suffit d'utiliser la définition de l'exponentielle complexe : $7\mathrm{e}^{0,3\mathrm{i}} = 7\cos(0,3) + \mathrm{i}\sin(0,3)$.

Exercice n° 4

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin^4(x) = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^4 = \frac{1}{16}\left(e^{i4x} - 4e^{i2x} + 6 - 4e^{-i2x} + e^{i4x}\right) = \frac{1}{8}\cos(4x) - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sin(5x) = \mathrm{Im}(e^{i5x}) = \mathrm{Im}((e^{ix})^5) = \mathrm{Im}((\cos(x)+i\sin(x))^5) = 5\cos^4(x)\sin(x) - 10\cos^2(x)\sin^3(x) + \sin^5(x)$$

3. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$\begin{aligned}\cos(x) - \cos(5x) &= \mathrm{Re}(e^{ix}) - \mathrm{Re}(e^{i5x}) = \mathrm{Re}(e^{i3x}e^{-i2x} - e^{i3x}e^{i2x}) = \mathrm{Re}(e^{i3x}(e^{-i2x} - e^{i2x}))\\ &= \mathrm{Re}(-2i\sin(2x)e^{i3x}) = -2\sin(2x)\mathrm{Re}(ie^{i3x}) = 2\sin(2x)\sin(3x).\end{aligned}$$

2 Un peu plus difficile

Exercice n° 5

$1 + j + j^2 = 0$ on en déduit : $1 + j + j^2 + j^3 + j^4 + j^5 + \cdots = \underbrace{1 + j + j^2}_{=0} + \underbrace{j^3 + j^4 + j^5}_{=j^3 \times 0 = 0} + \ldots$

Comme $2022 = 3 \times 674$, on a :

$$\sum_{k=0}^{2022} j^k = \sum_{l=0}^{673} j^{3l}(1 + j + j^2) \ + j^{2022} = j^{2022}$$

Enfin, $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ donc $j^{2022} = e^{i2\pi \times 674} = 1$.

Exercice n° 6

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe complexe $b - a = 2 - i$ et le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour affixe complexe $c - a = 6 - 3i = 3(2 - i)$. Les affixes des vecteurs sont proportionnelles, on en déduit que les vecteurs sont colinéaires et les points A, B, C sont alignés.

Exercice n° 7

Résolvons $(E_1) : z^2 - 3\overline{z} = 1$.
Soit $z \in \mathbb{C}$, on note $a = \mathrm{Re}(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$. On a :

$$(E_1) \iff (a + ib)^2 - 3(a - ib) = 1 \iff a^2 - 3a - b^2 + i(2ab + 3b) = 1$$

Par unicité de la forme algébrique on a : $(E_1) \iff a^2 - 3a - b^2 = 1$ et $b(2a + 3) = 0$.
On a donc $b = 0$ ou $a = -\frac{3}{2}$.

— Si $b = 0$, $(E_1) \iff a^2 - 3a - 1 = 0 \iff a \in \{\frac{3-\sqrt{13}}{2}; \frac{3-\sqrt{13}}{2}\}$.

— Si $a = -\frac{3}{2}$, $(E_1) \iff \frac{9}{4} + \frac{9}{2} - b^2 = 1 \iff b^2 = \frac{23}{4} \iff b \in \{\frac{\sqrt{23}}{2}; -\frac{\sqrt{23}}{2}\}$.

Finalement, l'ensemble des solutions de (E_1) est $\{\frac{3-\sqrt{13}}{2}\ ;\ \frac{3+\sqrt{13}}{2}; -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{23}}{2}; -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{23}}{2}\}$.

Résolvons (E_2). Soit $z \in \mathbb{C}$, M son image dans le plan complexe. On a :

$$(E_2)\ :\ |1 - z + 3i| = |iz + 4| \iff |1 + 3i - z| = |z - 4i|$$

Soit les points $A(1 + 3i)$ et $B(4i)$, interprétons (E_2) en termes de distances : $(E_2) \iff AM = BM$ et donc (E_2) est satisfaite si, et seulement si, M est sur la médiatrice du segment $[AB]$.
Trouvons la forme des affixes des points de cette droite.
La médiatrice (d) du segment $[AB]$ est la droite orthogonale à (AB) qui passe par C, le milieu de $[AB]$. On a $z_C = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{1+7i}{2}$.

Un vecteur directeur de (d) est $\overrightarrow{AB}$ d'affixe complexe $z_B - z_A = \mathrm{i} - 1$ et donc de coordonnées cartésiennes $(-1;1)$. On en déduit que $\overrightarrow{w}(1;1)$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et donc directeur de (d).
Les points de (d) ont donc une affixe complexe de la forme $z = z_C + tz_{\overrightarrow{w}} = \frac{1+2t+\mathrm{i}(7+2t)}{2}$ avec $t \in \mathbb{R}$.
Finalement, l'ensemble des solutions de (E_2) est $\{\frac{1+2t+\mathrm{i}(7+2t)}{2} \ / \ t \in \mathbb{R}\}$.

Remarque : $z = \frac{1+t+i(7+t)}{2}$ *est également correct, pourquoi ?*

Exercice n° 8

Soit $t \in [0;2\pi[$. On a : $1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t}{2}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{t}{2}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t}{2}}\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t}{2}} 2\cos(\frac{t}{2})$.

- Si $0 \leq t \leq \pi$: alors $\cos(\frac{t}{2}) \geq 0$ et $2\cos(\frac{t}{2})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t}{2}}$ est la forme exponentielle de de $1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$. On en déduit que son module est $2\cos(\frac{t}{2})$ et que son argument principal est $\frac{t}{2}$.
- Si $\pi < t < 2\pi$: alors $\cos(\frac{t}{2}) < 0$ et la forme exponentielle de $1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ est $-2\cos(\frac{t}{2})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{t}{2}+\pi)}$. Son module est donc $-2\cos(\frac{t}{2})$, un de ses arguments est $\frac{t}{2} + \pi$ et son argument principal est $\frac{t}{2} - \pi$.

Exercice n° 9

Soit a, b, c trois complexes (non nuls) de même module. Ils sont donc de la forme $a = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $b = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ et $a = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}$ avec $(r;\theta;\phi;\psi) \in \mathbb{R}^{+*}\times] - \pi;\pi]^3$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} &= \frac{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi})(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi})(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi+\psi)}} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+\phi}{2}} 2\cos(\frac{\theta-\phi}{2})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\phi+\psi}{2}} 2\cos(\frac{\phi-\psi}{2})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\psi+\theta}{2}} 2\cos(\frac{\psi-\theta}{2})}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi+\psi)}} \\
&= 8\cos(\frac{\theta-\phi}{2})\cos(\frac{\phi-\psi}{2})\cos(\frac{\psi-\theta}{2})
\end{aligned}$$

Finalement, $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$ est un nombre réel et, puisque $\forall x \in \mathbb{R}, \ |\cos(x)| \leq 1$, ce nombre est dans $[-8;8]$.
Ces bornes sont-elles atteintes ?

3 Plus difficile

Exercice n° 10

Soit $M(z = x + \mathrm{i}y)$ dans le plan complexe (avec $(x;y) \in \mathbb{R}^2$). $\dfrac{z - \mathrm{i}}{z - 1}$ est réel si, et seulement si sa partie imaginaire est nulle. On a : $\mathrm{Im}(\frac{z-\mathrm{i}}{z-1}) = \mathrm{Im}(\frac{(x+\mathrm{i}(y-1))(x-1-\mathrm{i}y)}{|z-1|^2}$ et donc $\frac{z-\mathrm{i}}{z-1} \in \mathbb{R} \iff y + x = 1$.
Finalement, l'ensemble des points cherchés est la droite d'équation $y = 1 - x$.

Exercice n° 11

Soit z un complexe de module 1, $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. En utilisant l'angle moitié, on trouve $|1 + z|^2 + |1 - z|^2 = 4$.

Exercice n° 12

1. $M = N$ correspond à $z = z^2 \iff z \in \{0;1\}$ ce qui est exclu car $z \notin \{0;1;-1\}$. De façon analogue, $M = P$ et $N = P$ sont faux.
   Finalement, M, N et P sont distincts deux-à-deux.

2. a) D'après le théorème de Pythagore, MNP est rectangle en P si et seulement si $PM^2+PN^2 = NP^2$. On a :

$$\begin{aligned}
PM^2+PN^2=NP^2 &\iff |z^3-z|^2+|z^3-z^2|^2=|z^2-z|^2\\
&\iff |z|^2|z-1|^2|z+1|^2+|z|^4|z+1|^2=|z|^2|z-1|^2\\
&\iff |z+1|^2+|z|^2=1
\end{aligned}$$

Comment justifier la dernière équivalence ?

b) On a d'une part :

$$\begin{aligned}
|z+1|^2+|z|^2=1 &\iff (z+1)\overline{(z+1)}+z\overline{z}=1\\
&\iff 2z\overline{z}+z+\overline{z}=0 \ : (\star)
\end{aligned}$$

Et d'autre part :$\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(\overline{z+\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{4} \iff z\overline{z}+\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}\overline{z}=0 \iff (\star)$.

On a donc bien $|z+1|^2+|z|^2=1 \iff \left(z+\frac{1}{2}\right)\left(\overline{z+\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{4}$

c) Posons $Z=z+\frac{1}{2}$. D'après les questions précédentes, En déduire que MNP est rectangle si et seulement si $Z\overline{Z}=\frac{1}{4} \iff |Z|=\frac{1}{2} \iff |z+\frac{1}{2}|=\frac{1}{2}$, c'est-à-dire si, et seulement si, $M(z)$ appartient au cercle de centre $A(-\frac{1}{2})$ et de rayon $\frac{1}{2}$.