Chapitre 3 - Fonctions - Exercices

Exercice n° 1

VRAI ou FAUX sur l'ensemble du chapitre.

a) Deux polynômes différents ont deux dérivées différentes.
b) Une fonction dont la dérivée est nulle est constante.
c) La seule fonction égale à sa dérivée est exp.
d) On n'a jamais $f \circ g = g \circ f$.
e) Soit une fonction f définie et dérivable sur $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$ et telle que : $\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f'(x) > 0$.
   Alors f est strictement croissante sur $\mathcal{D}_f$.
f) Il existe des fonctions qui sont paires et impaires.
g) Pour tout réel x, on a $\cos(\arccos(x)) = x$.
h) Pour tout réel x, on a $\arccos(\cos(x)) = x$.

1 Applications directes du cours

Exercice n° 2

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Déterminer $\sin([0;1])$ et $\cos^{-1}(\mathbb{Z})$.
2. Déterminer le domaine de définition de $f(x) = \sqrt{\sin(x)}$.
3. Sans utiliser la dérivation, prouver que $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$.
4. Montrer que $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et déterminer sa fonction dérivée.
5. Retrouver les formules vues en terminale : $(\ln u)'$, $(\mathrm{e}^u)'$, $(\sqrt{u})'$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos(ax+b)$.
   (On précisera les conditions pour u)
6. Calculer (à la main) : $\cos(\arccos(\frac{1}{2}))$; $\arccos(\cos(\frac{5\pi}{4}))$; $\arccos(\cos(-\frac{\pi}{6}))$.
7. Prouver que, lorsque les expressions sont bien définies, on a : $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \alpha^\gamma$.
8. Soit $a > 0$. Faire l'étude complète de $x \mapsto a^x$.
9. Soit $b \in \mathbb{R}$. Faire l'étude complète de $x \mapsto x^b$.

Exercice n° 3

Dériver les fonctions suivantes (après avoir donné leur domaine de définition) :

$f(t) = \sqrt{t^2 - 3t + 2}$	$g(t) = \ln((2t-1)(t+7))$	$h(t) = t^2 \ln(t)$
$i(x) = (2x+1)^9$	$j(U) = \ln(U^3 - 5U - 4)$	$k(x) = (\tan(x))^2$

Pour s'entraîner en autonomie : fiche 9 du Cahier de Calcul.

2 Un peu plus dur

Exercice n° 4

Calculer $A = \sin\left(\arcsin(\frac{1}{3}) - \arcsin(\frac{1}{4})\right)$ et $B = \cos\left(\arccos(\frac{1}{3}) + \arccos(\frac{1}{4})\right)$.

Exercice n° 5

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

(E_1) : $\sqrt{x+1} = 3x - 7$	(E_2) : $\mathrm{e}^x = \ln(2)$	(E_3) : $\cos(5x - \frac{\pi}{5}) = -\frac{1}{2}$
(E_4) : $\cos x = 0,4$	(I_1) : $\ln(x^2 + x - 2) < \ln(x+5)$	(I_2) : $\cos(x - \frac{\pi}{5}) < 0$

Exercice n° 6

Les fonctions **cosinus et sinus hyperboliques** sont définies par $\mathrm{ch}(x) = \frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$ et $\mathrm{sh}(x) = \frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$.

1. Faire l'étude complète de sh et de ch.
2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$

ch *et* sh *font partie des fonctions de référence à connaître.*

Exercice n° 7

L'objectif de cet exercice est de transformer les expressions du type $A\cos(t) + B\sin(t)$ en expressions du type $C\cos(t \pm \phi)$. Cette compétence est importante et doit être bien comprise.

1. Un exemple : $3\cos(t) + 4\sin(t)$.
   (a) Justifier qu'il existe un réel ϕ dans $[0; 2\pi[$ tel que $\cos(\phi) = \frac{3}{5}$ et $\sin(\phi) = \frac{4}{5}$.
   (b) Prouver qu'on a alors : $3\cos(t) + 4\sin(t) = 5(\cos(t)\cos(\phi) + \sin(t)\sin(\phi))$. Conclure.
2. Autre exemple : en procédant de façon analogue à la question **1.** écrire $5\cos(t) - \sin(t)$ sous la forme $C\cos(t + \phi)$
3. Traiter le cas général.

Exercice n° 8

a) Prouver que la fonction $f(x) = \arccos(x) + \arcsin(x)$ est constante sur $[-1; 1]$.
b) Prouver que $\forall x \in [-1; 1],\ \arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$.

Exercice n° 9

a) Prouver que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$.
b) Trouver un résultat similaire sur $\mathbb{R}^{-*}$.

3 Démontrer les résultats du cours

Exercice n° 10

Prouver les formules pour les dérivées de Arcsin et Arctan.

4 Plus difficile...

Exercice n° 11

Résoudre l'équation $x^2 + 3x - 7 + \dfrac{6}{\sqrt{x^2+3x}} = 0$.

Exercice n° 12

On considère le polynôme $P(x) = 8x^3 - 6x - 1$.

a) Etudier la fonction P.
b) Prouver que P a trois racines, et que ces racines sont dans $[-1; 1]$. On les nomme : $x_1 < x_2 < x_3$.
c) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$, en déduire : $P(\cos(\theta)) = 0 \iff 2\cos(3\theta) - 1 = 0$.
d) Donner les valeurs de x_1, x_2 et x_3.

Exercice n° 13

Montrer que pour tout réel strictement positif k, l'équation $2^x + 3^x = k$ admet une unique solution.