Chapitre 3 - Fonctions - Exercices

Exercice n° 1

VRAI ou FAUX sur l'ensemble du chapitre.

a) Une fonction peut être égale à sa dérivée.

b) Deux polynômes différents ont deux dérivées différentes.

c) Une fonction dont la dérivée est nulle est constante.

d) On n'a jamais $f \circ g = g \circ f$.

e) Soit une fonction f définie et dérivable sur $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$ et telle que : $\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f'(x) > 0$.
Alors f est strictement croissante sur $\mathcal{D}_f$.

f) Il existe des fonctions qui sont paires et impaires.

g) Il existe des fonctions qui sont périodiques et non bornées.

1 Applications directes du cours

Exercice n° 2

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Déterminer $\sin([0;1])$ et $\cos^{-1}(\mathbb{Z})$.
2. Déterminer le domaine de définition de $f(x) = \sqrt{\sin x}$.
3. Sans utiliser la dérivation, prouver que $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$.
4. Montrer que $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et déterminer sa fonction dérivée.
5. Retrouver les formules vues en terminale : $(\ln u)'$, $(\mathrm{e}^u)'$, $(\sqrt{u})'$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos(ax+b)$.
(On précisera les conditions pour u)
6. Calculer (à la main) : $\cos(\arccos(\frac{1}{2}))$; $\arccos(\cos(\frac{5\pi}{4}))$; $\arccos(\cos(-\frac{\pi}{6}))$.
7. Prouver que, lorsque les expressions sont bien définies, on a : $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \alpha^\gamma$.
8. Soit $a > 0$. Faire l'étude complète de $x \mapsto a^x$.
9. Soit $b \in \mathbb{R}$. Faire l'étude complète de $x \mapsto x^b$.

Exercice n° 3

Dériver les fonctions suivantes (après avoir donné leur domaine de définition) :

$f(t) = \sqrt{t^2 - 3t + 1}$	$g(t) = \ln((2t-1)(t+7))$	$h(t) = t^2 \ln t$
$i(x) = (2x+1)^9$	$j(U) = \ln(U^3 - 5U - 4)$	$k(x) = (\tan x)^2$

Pour s'entraîner en autonomie : fiche 9 du Cahier de Calcul.

2 Un peu plus dur

Exercice n° 4

Calculer $A = \sin\left(\arcsin(\frac{1}{3}) - \arcsin(\frac{1}{4})\right)$ et $B = \cos\left(\arccos(\frac{1}{3}) + \arccos(\frac{1}{4})\right)$.

Exercice n° 5

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

(E_1) : $\sqrt{x+1} = 3x - 7$	(E_2) : $\mathrm{e}^x = \ln 2$	(E_3) : $\cos(5x - \frac{\pi}{5}) = -\frac{1}{2}$
(E_4) : $\cos x = 0,4$	(I_1) : $\ln(x^2 + x - 2) < \ln(x+5)$	(I_2) : $\cos(x - \frac{\pi}{5}) < 0$

Exercice n° 6

Prouver les formules pour les dérivées de Arcsin et Arctan.

Exercice n° 7

Les fonctions **cosinus et sinus hyperboliques** sont définies par $\mathrm{ch}(x) = \frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$ et $\mathrm{sh}(x) = \frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$.

1. Faire l'étude complète de sh et de ch.
2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$

ch *et* sh *font partie des fonctions de référence à connaître.*

Exercice n° 8

L'objectif de cet exercice est de transformer les expressions du type $A\cos t + B\sin t$ en expressions du type $C\cos(t+\phi)$. Cette compétence est importante et doit être bien comprise.

1. Un exemple : $3\cos t + 4\sin t$.
   (a) Justifier qu'il existe un réel ϕ tel que $\cos\phi = \frac{3}{5}$ et $\sin\phi = \frac{4}{5}$.
   (b) Prouver qu'on a alors : $3\cos t + 4\sin t = 5(\cos t\cos\phi + \sin t\sin\phi)$. Conclure.
2. Autre exemple : en procédant de façon analogue à la question **1.** écrire $5\cos t - \sin t$ sous la forme $C\cos(t+\phi)$
3. Cas général.

Exercice n° 9

a) Prouver que la fonction $f(x) = \arccos x + \arcsin x$ est constante sur $[-1;1]$.

b) Prouver que $\forall x \in [-1;1], \arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$.

Exercice n° 10

a) Prouver que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.

b) Trouver un résultat similaire sur $\mathbb{R}^{-*}$.

3 Plus difficile...

Exercice n° 11

Résoudre l'équation $x^2 + 3x - 7 + \dfrac{6}{\sqrt{x^2+3x}} = 0$.

Exercice n° 12

On considère le polynôme $P(x) = 8x^3 - 6x - 1$.

a) Etudier la fonction P.

b) Prouver que P a trois racines, et que ces racines sont dans $[-1;1]$. On les nomme : $x_1 < x_2 < x_3$. *(A ce stade de l'exercice, vous ne pouvez pas trouver les valeurs de ces racines)*

c) Exprimer, pour $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos\theta$.

d) En déduire : $P(\cos\theta) = 0 \iff 2\cos(3\theta) - 1 = 0$.

e) En déduire x_1, x_2 et x_3.

Exercice n° 13

Montrer que pour tout réel strictement positif k, l'équation $2^x + 3^x = k$ admet une unique solution.