

Correction des exercices du chapitre 3

1 Applications directes du cours

Exercice n° 1

1. $\sin$ est strictement croissante sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ donc sur $[0; 1]$. De plus, elle est continue donc $\sin([0; 1]) = [0; \sin(1)]$.
 $\cos^{-1}(\mathbb{Z}) = \cos^{-1}(\{-1; 0; 1\}) = \cos^{-1}(\{-1\} \cup \cos^{-1}(\{0\}) \cup \cos^{-1}(\{1\}) = \{k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$.
2. $\sqrt{\sin x}$ a du sens si, et seulement si, $\sin(x) \geq 0$, c'est-à-dire si, et seulement si x est dans un intervalle de la forme $[0 + 2k\pi; \pi + 2k\pi]$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Finalement, le domaine de définition de f est $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [0 + 2k\pi; \pi + 2k\pi]$.
3. Soit $(a; b) \in (\mathbb{R}^+)^2$ avec $a \leq b$. On a $\sqrt{b} - \sqrt{a} = \frac{b-a}{\sqrt{b} + \sqrt{a}}$ qui est positif comme quotient de nombres positifs. Autrement dit : $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.
4. Soit $a > 0$ et $h > -a$ non nul. On a :

$$\frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} = \frac{a+h-a}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}$$

Lorsque $h \rightarrow 0$ on a $\sqrt{a+h} + \sqrt{a} \rightarrow 2\sqrt{a}$ et, comme $a \neq 0$, on a $\frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{a}}$.

5. Il s'agit juste de bien comprendre qu'il s'agit de composées de fonctions. Par exemple : $(\ln(u))' = (\ln \circ u)' = \ln' \circ u \times u' = \frac{u'}{u}$. Cette formule s'applique lorsque u est une fonction strictement positive et dérivable. On a aussi : $(e^u)' = u'e^u$ (sans restriction pour u), $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ (u est une fonction strictement positive et dérivable), $\frac{d}{dx}(a \cos(ax+b)) = -a \sin(ax+b)$.
6. $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| < 1$ et donc $2 - \sin(x) > 0$ ce qui prouve que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| = \frac{|3 + \cos(x)|}{|2 - \sin(x)|} \leq \frac{3 + |\cos(x)|}{2 - |\sin(x)|} \leq 4$$

$|f|$ est majorée sur $\mathbb{R}$ donc f est bornée sur $\mathbb{R}$.

7. $\cos(\arccos(\frac{1}{2})) = \frac{1}{2}$; $\arccos(\cos(\frac{5\pi}{4})) = \frac{3\pi}{4}$; $\arccos(\cos(-\frac{\pi}{6})) = \frac{\pi}{6}$.
8. On a, pour $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^2$, $\alpha^{\beta+\gamma} = e^{(\beta+\gamma)\ln(\alpha)} = e^{\beta\ln(\alpha)} e^{\gamma\ln(\alpha)} = \alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^{\beta} \alpha^{\gamma}$.
9. Soit $a > 0$. $a^x = e^{x \ln(a)}$ est défini pour tout $x \in \mathbb{R}$. C'est une composée de fonctions dérivables et on a, $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{d}{dx}(e^{x \ln(a)}) = \ln(a)e^{x \ln(a)}$ qui est du signe de $\ln(a)$.
 - Si $0 < a < 1$: $\ln(a) < 0$ et donc $x \mapsto a^x$ est strictement décroissante. Ses limites se calculent par opérations et on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$.
 - Si $a = 1$: $\ln(a) = 0$ et la fonction est constante égale à 1.
 - Si $a > 1$: $\ln(a) > 0$ et donc $x \mapsto a^x$ est strictement croissante. Ses limites se calculent par opérations et on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$.
10. Soit $b \in \mathbb{R}$. $x^b = e^{b \ln(x)}$ est défini pour tout $x > 0$. C'est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et, par opérations on a $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{d}{dx}(x^b) = x^b \times \frac{b}{x}$ qui est du signe de b .
 - Si $b < 0$: $x \mapsto x^b$ est strictement décroissante. Ses limites se calculent par opérations et on a $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^b = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^b = 0$.
 - Si $b = 0$: la fonction est constante sur $\mathbb{R}^{+*}$ égale à 1.
 - Si $b > 0$: $\ln(a) > 0$ et donc $x \mapsto x^b$ est strictement croissante. Ses limites se calculent par opérations et on a $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^b = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^b = +\infty$.

Exercice n° 2

- $f(t) = \sqrt{t^2 - 3t + 2}$ est définie ssi $t^2 - 3t + 2 \geq 0 \Leftrightarrow (t-1)(t-2) \geq 0 \Leftrightarrow t \in]-\infty; 1] \cup [2; +\infty[$.
Par opérations, on peut dériver f sur $] -\infty; 1[\cup] 2; +\infty[$ et on a $f'(t) = \frac{2t-3}{t^2-3t+2}$.
Remarque : à ce stade, on ne sait pas si la fonction est dérivable ou non en 1 et en 2. On sait juste qu'on ne peut pas calculer la dérivée par opérations.

- $g(t) = \ln((2t-1)(t+7))$ est définie ssi $(2t-1)(t+7) > 0 \Leftrightarrow t \in]-\infty; -7[\cup]\frac{1}{2}; +\infty[$. Sur ce domaine, on peut dériver g par opérations et on a $g'(t) = \frac{4t+13}{(2t-1)(t+7)}$.
- $h(t) = t^2 \ln(t)$ est définie ssi $t \in \mathbb{R}^{+*}$. Sur ce domaine on peut dériver h par opérations et on a : $h'(t) = 2t \ln(t) + t$.
- $i(x) = (2x+1)^9$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynômiale. On la dérive en utilisant la formule pour le composées et on a : $\forall x \in \mathbb{R}, i'(x) = 9(2x+1)^8 \times 2 = 18(2x+1)^8$.
- $j(U) = \ln(U^3 - 5U - 4)$ est définie ssi $U^3 - 5U - 4 > 0$. C'est une inéquation polynômiale de degré 3, il faut factoriser $U^3 - 5U - 4$. On remarque que -1 est une racine évidente, on peut donc factoriser par $U+1$ et on trouve $U^3 - 5U - 4 = (U+1)(U^2 - U - 4)$. Les racines de $U^3 - 5U - 4$ sont donc $-1, \frac{1-\sqrt{17}}{2}$ et $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$. À l'aide d'un tableau de signes, on voit que $U^3 - 5U - 4 > 0 \Leftrightarrow U \in]\frac{1-\sqrt{17}}{2}; -1[\cup]\frac{1+\sqrt{17}}{2}; +\infty[$. Sur ce domaine, j est dérivable et on a $j'(U) = \frac{3U^2-5}{U^3-5U-4}$.
- $k(x) = (\tan(x))^2$ est définie ssi $\tan(x)$ existe, c'est-à-dire ssi $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[$. Sur ce domaine, k est dérivable et on a : $k' = 2 \tan \times \tan' = \frac{2 \tan}{\cos^2}$.

2 Vrai ou faux sur l'ensemble du chapitre

- Faux. Contre-exemple : $X+1$ et X sont deux polynômes différents mais ils ont le même polynôme dérivé : 1.
- Faux. Contre-exemple : la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, de dérivée nulle, mais n'est pas constante.
- Faux. La fonction nulle est égale à sa dérivée et ce n'est pas exp.
- Faux. Contre-exemple : on prend $f = g = 0$. On a $f \circ g = g \circ f = 0$.
- Faux. On prend $f(x) = -\frac{1}{x}$ qui est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Sa dérivée vaut $f'(x) = \frac{1}{x^2} > 0$ alors que f n'est pas croissante. (En effet, $f(-1) = 1$ et $f(1) = -1$).
- Vrai. La fonction nulle est paire et impaire.
- Faux. Pour $x \notin [-1; 1]$, $\arccos(x)$ n'a pas de sens.
- Faux. $x = 2\pi$ fournit un contre-exemple : $\arccos(\cos(2\pi)) = 0$.

3 Un peu plus dur

Exercice n° 3

$f(x) = x^4 + 2x^2 - 8x + 1$ est une fonction polynômiale, elle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc sur $[0; 2]$.

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 4(x^3 + x - 2) = 4(x-1)(x^2 + x + 2)$. Le discriminant de $x^2 + x + 2$ est $\Delta = -7$ donc ce polynôme du second degré n'admet pas de racine réelle et son signe est constant et positif sur $\mathbb{R}$. Le signe de $f'(x)$ est donc le signe de $x-1$ et on déduit le tableau de variations suivant :

x	0	1	2
$f'(x)$	-	0	+
f	$f(0)$	$f(1)$	$f(2)$

On a : $f(0) = 1, f(1) = -4$ et $f(2) = 9$, on déduit que le minimum de f sur $[0; 2]$ est -4 , son maximum est 9.

Exercice n° 4

On utilise les formules d'additions des arcs ($\cos(a+b) \dots$), le fait que la composition de deux fonctions réciproques donne l'identité, ainsi que les formules : $\forall x \in [-1; 1], \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2} = \sin(\arccos(x))$. On a ainsi :

$$A = \sin(\arcsin(\frac{1}{3})) \cos(\arcsin(\frac{1}{4})) - \cos(\arcsin(\frac{1}{3})) \sin(\arcsin(\frac{1}{4})) = \frac{1}{3} \times \sqrt{\frac{15}{16}} - \sqrt{\frac{8}{9}} \times \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{8}}{12}$$

$$B = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{8}}{3} \times \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{1 - \sqrt{120}}{12}$$

Exercice n° 5

- (E_1) est définie pour $x \geq -1$. On veut appliquer la fonction $t \mapsto t^2$, on a deux possibilités : travailler par implication et faire une réciproque à la fin ou bien travailler par équivalences mais en veillant à ce que l'on utilise des intervalles sur lesquels il y a bijection. Optons pour la seconde approche : $t \mapsto t^2$ réalise des bijections $\mathbb{R}^- \rightarrow \mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, il faut donc qu'on veille à ce que les deux membres soient de même signe. $\forall x \in [-1; +\infty[$, $\sqrt{x+1} \geq 0$ et $3x-7 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{7}{3}$. Pour $x \in [-1; \frac{7}{3}]$, l'équation n'est pas satisfaite car les deux membres sont de signes différents, pour $x \geq \frac{7}{3}$ on a :

$$\sqrt{x+1} = 3x-7 \Leftrightarrow x+1 = (3x-7)^2 \Leftrightarrow 9x^2 - 43x + 48 = 0 \Leftrightarrow x \in \{\frac{16}{9}; 3\} \Leftrightarrow x \in \{3\}$$

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x = \ln 2 \Leftrightarrow x = \ln(\ln(2))$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(5x - \frac{\pi}{5}) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 5x - \frac{\pi}{5} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ou $5x - \frac{\pi}{5} = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).
- $$\Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{13\pi}{15 \times 5} + k\frac{2\pi}{5} ; -\frac{7\pi}{15 \times 5} + k\frac{2\pi}{5} / k \in \mathbb{Z} \right\}.$$
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos x = 0,4 \Leftrightarrow x \in \{\arccos(0,4) + 2k\pi ; -\arccos(0,4) + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.
- (I_1) est définie sur $(]-\infty; -2[\cup]1; +\infty[) \cap]-5; +\infty[$ c'est-à-dire sur $] -5; -2[\cup]1; +\infty[$. On peut alors appliquer exp qui est une bijection strictement croissante et on a :

$$\ln(x^2 + x - 2) < \ln(x + 5) \Leftrightarrow x^2 - 7 < 0 \Leftrightarrow x \in]-\sqrt{7}; \sqrt{7}[\Leftrightarrow x \in]-\sqrt{7}; -2[\cup]1; \sqrt{7}[.$$

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(x - \frac{\pi}{5}) < 0 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{5} \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] \frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right[\Leftrightarrow x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] \frac{7\pi}{10} + 2k\pi; \frac{17\pi}{10} + 2k\pi \right[.$

Exercice n° 6

1. ch et sh sont définies sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}(-x) = \text{ch}(x)$ et $\text{sh}(-x) = -\text{sh}(x)$. On en déduit que ch est paire et sh est impaire.

Il suit qu'il suffit de les étudier sur $\mathbb{R}^+$ (on pourrait tout aussi bien choisir $\mathbb{R}^-$).

ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$ en tant que combinaisons linéaires (et composées) de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. En appliquant les formules de dérivation on obtient : $\text{ch}' = \text{sh}$ et $\text{sh}' = \text{ch}$.

(La seule difficulté est de bien dériver e^{-x}).

On a $\text{sh}' = \text{ch}$ et il est clair que $\text{ch} > 0$ (voyez-vous bien pourquoi ?) donc sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

La parité de sh nous permet de limiter son étude à $\mathbb{R}^+$ et on a uniquement la limite en $+\infty$ à déterminer. (Voyez-vous pourquoi, sans calcul, on peut affirmer que $\text{sh}(0) = 0$?) On a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$$

On en déduit, par opérations sur les limites, que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{sh}(x) = +\infty$. On dresse le tableau de variations de sh sur $\mathbb{R}^+$ et on le complète à $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
sh	$-\infty$	0	$+\infty$

On a $\text{ch}' = \text{sh}$. Or, le tableau de variations de sh nous donne son signe.

On a $\text{ch}(0) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{ch}(x) = +\infty$ ce qui nous permet de construire le tableau de variations de ch sur $\mathbb{R}^+$ puis de le compléter à $\mathbb{R}$ (par parité) :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
sh	$-$	0	$+$
ch	$+\infty$	1	$+\infty$

2. On a : $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = (\operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x))(\operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x)) = e^x e^{-x} = e^0 = 1$.

Exercice n° 7

1. (a) On a $(\frac{3}{5})^2 + (\frac{4}{5})^2 = 1$ donc il existe $\phi \in [0; 2\pi[$ tel que $\cos(\phi) = \frac{3}{5}$ et $\sin(\phi) = \frac{4}{5}$.
 (b) On a alors :

$$3 \cos(t) + 4 \sin(t) = 5(\frac{3}{5} \cos(t) + \frac{4}{5} \sin(t)) = \cos(t) \cos(\phi) + \sin(t) \sin(\phi) = 5 \cos(t - \phi).$$

2. On a $5^2 + (-1)^2 = 26$ et $(\frac{5}{\sqrt{26}})^2 + (\frac{-1}{\sqrt{26}})^2 = 1$ donc il existe $\psi \in [0; 2\pi[$ tel que $\cos(\psi) = \frac{5}{\sqrt{26}}$ et $\sin(\psi) = \frac{-1}{\sqrt{26}}$.
 Ensuite :

$$5 \cos(t) - \sin(t) = \sqrt{26} = \frac{5}{\sqrt{26}} \cos(t) + \frac{-1}{\sqrt{26}} \sin(t) = \sqrt{26} \cos(t - \psi)$$

3. Soit A et B deux réels qui ne sont pas tous les deux nuls. On a alors $A^2 + B^2 \neq 0$ et il existe $\theta \in [0; 2\pi[$ tel que $\cos(\theta) = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$ et $\sin(\theta) = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$.
 Il suit que : $A \cos(t) + B \sin(t) = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(t - \theta)$.

Exercice n° 8

- a) La fonction $f(x) = \arccos x + \arcsin x$ est définie et continue sur $[-1; 1]$, elle est dérivable sur $] -1; 1[$. On a :

$$\forall x \in] -1; 1[, f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

donc f est constante sur l'intervalle $] -1; 1[$. Par continuité, elle est constante sur $[-1; 1]$.

- b) On a $\forall x \in [-1; 1], f(x) = f(0) \iff \arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$.

Exercice n° 9

La fonction $f : x \mapsto \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x})$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$, de dérivée nulle. On en déduit qu'elle est constante sur les intervalles $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$. On a :

- $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f(x) = f(1) \iff \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}^{-*}, f(x) = f(-1) \iff \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = -\frac{\pi}{2}$.

4 Démontrer les résultats du cours

Exercice n° 10

La fonction $\sin$ étant dérivable sur $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ de dérivée non nulle sur $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, la fonction $\arcsin$ est dérivable sur $] -1; 1[$.

Pour $x \in] -1; 1[$, dérivons la relation $\sin(\arcsin(x)) = x$, on obtient $\cos(\arcsin(x)) \arcsin'(x) = 1$. En remarquant que $\cos(\arcsin(x)) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \neq 0$ on déduit $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

La fonction $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. En dérivant la relation $\forall x \in \mathbb{R}, \tan(\arctan(x)) = x$ on a : $\tan'(\arctan(x)) \arctan'(x) = 1 \iff (1 + \tan^2(\arctan(x)) \arctan'(x) = 1 \iff \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

5 Plus difficile...

Exercice n° 11

L'équation a du sens pour $x \in]-\infty; -3[\cup]0; +\infty[$. Pour x dans cet ensemble, posons $Z = \sqrt{x^2 + 3x}$. L'équation devient alors :

$$Z^2 - 7 + \frac{6}{Z} = 0 \iff Z^3 - 7Z + 6 = 0 \iff (Z - 1)(Z - 2)(Z + 3) = 0 \iff Z \in \{1; 2; -3\}$$

Comme $Z > 0$, on écarte -3 et on a :

- soit $Z = 1$ c'est-à-dire $\sqrt{x^2 + 3x} = 1 \iff x^2 + 3x - 1 = 0 \iff x \in \left\{ \frac{-3+\sqrt{13}}{2}; \frac{-3-\sqrt{13}}{2} \right\}$;
- soit $Z = 2$, c'est-à-dire $\sqrt{x^2 + 3x} = 2 \iff x^2 + 3x - 4 = 0 \iff x \in \{1; -4\}$.

Les quatre valeurs trouvées sont dans l'ensemble $] - \infty; -3[\cup]0; +\infty[$, ce sont donc bien des solutions.

Exercice n° 12

On considère le polynôme $P(x) = 8x^3 - 6x - 1$.

a) P est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}, P'(x) = 24x^2 - 6 = 6(2x - 1)(2x + 1)$.

On en déduit le signe de P' puis les variations de P :

- $P'(x) < 0 \iff x \in]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[$ et donc P est strictement décroissante sur $] - \frac{1}{2}; \frac{1}{2}[$;
- $P'(x) > 0 \iff x \in \mathbb{R} \setminus]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[$ et donc P est strictement croissante sur $] - \infty; -\frac{1}{2}[$ et sur $]\frac{1}{2}; +\infty[$.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
P	$-\infty$	3	-3	$+\infty$

b) On applique le TVI sur $] - \infty; -\frac{1}{2}[$: la fonction est continue, strictement croissante de $] - \infty; -\frac{1}{2}[$ sur $] - \infty; 3[$.
 $0 \in] - \infty; 3[$ donc il existe un unique $x_1 \in] - \infty; -\frac{1}{2}[$ tel que $f(x_1) = 0$.

f est croissante sur $] - \infty; -\frac{1}{2}[$ et $f(-1) = -3$ donc $x_1 > -1$. De même, il existe un unique $x_2 \in]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[$ et un unique $x_3 \in]\frac{1}{2}; +\infty[$ tels que $f(x_2) = f(x_3) = 0$.
 $f(1) = 1$ donc $x_3 < 1$.

c) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a :

$$\cos(3\theta) = \Re(e^{i3\theta}) = \Re((e^{i\theta})^3) = \cos(\theta)^3 - 3\cos(\theta)\sin^2(\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)$$

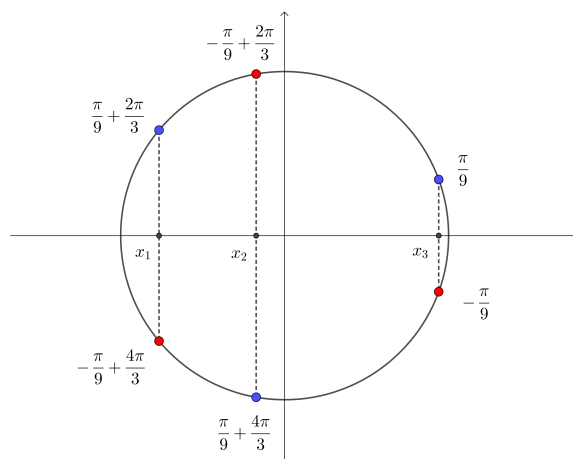
Il suit :

$$P(\cos(\theta)) = 0 \iff 8\cos(\theta)^3 - 6\cos(\theta) - 1 = 0 \iff 2\cos(3\theta) - 1 = 0$$

d) Puisque $-1 < x_1 < x_2 < x_3 < 1$, il existe des angles φ_1, φ_2 et φ_3 tels que $x_i = \cos(\varphi_i)$ pour $i \in \{1; 2; 3\}$.
 Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a :

$$P(\cos(\theta)) = 0 \iff \cos(3\theta) = \frac{1}{2} \iff \theta \in \left\{ \frac{\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

À l'aide d'une figure, on voit que $x_1 = \cos(\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{3})$, $x_2 = \cos(\frac{\pi}{9} + \frac{4\pi}{3})$ et $x_3 = \cos(\frac{\pi}{9})$



Exercice n° 13

$2^x + 3^x$ signifie $e^{x \ln(2)} + e^{x \ln(3)}$, ce qui a du sens pour tout réel x .

Notons $f : x \mapsto 2^x + 3^x$. C'est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, sa dérivée vaut $f'(x) = \ln(2)e^{x \ln(2)} + \ln(3)e^{x \ln(3)} > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$. Comme f est continue et strictement croissante, on a :

$$f(\mathbb{R}) = f(]-\infty; +\infty[) =]\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[=]0; +\infty[\quad (\text{par opérations sur les limites})$$

On en déduit que tout $k > 0$ admet un unique antécédent par f , autrement dit : l'équation $2^x + 3^x = k$ admet une unique solution.