Correction des exercices du chapitre 3

Exercice n° 1

a) Faux. Contre-exemple : $X+1$ et X sont deux polynômes différents mais ils ont le même polynôme dérivé : 1.

b) Faux. Contre-exemple : la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\begin{cases} 1 \text{ si } x>0 \\ -1 \text{ si } x<0 \end{cases}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, de dérivée nulle, mais n'est pas constante.

c) Faux. La fonction nulle est égale à sa dérivée et ce n'est pas exp.

d) Faux. Contre-exemple : on prend $f=g=0$. On a $f\circ g=g\circ f=0$.

e) Faux. On prend $f(x)=-\frac{1}{x}$ qui est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Sa dérivée vaut $f'(x)=\frac{1}{x^2}>0$ alors que f n'est pas croissante. (En effet, $f(-1)=1$ et $f(1)=-1$).

f) Vrai. La fonction nulle est paire et impaire.

g) Faux. Pour $x\notin[-1;1]$, $\arccos(x)$ n'a pas de sens.

h) Faux. $x=2\pi$ fournit un contre-exemple : $\arccos(\cos(2\pi))=0$.

1 Applications directes du cours

Exercice n° 2

1. sin est strictement croissante sur $[0;\frac{\pi}{2}]$ donc sur $[0;1]$. De plus, elle est continue donc $\sin([0;1])=[0;\sin(1)]$.
   $\cos^{-1}(\mathbb{Z})=\cos^{-1}(\{-1;0;1\}=\cos^{-1}(\{-1\}\cup\cos^{-1}(\{0\}\cup\cos^{-1}(\{1\}=\{k\frac{\pi}{2}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\}$.
2. $\sqrt{\sin x}$ a du sens si, et seulement si, $\sin(x)\geq 0$, c'est-à-dire si, et seulement si x est dans un intervalle de la forme $[0+2k\pi;\pi+2k\pi]$ avec $k\in\mathbb{Z}$. Finalement, le domaine de définition de f est $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}[0+2k\pi;\pi+2k\pi]$.
3. Soit $(a;b)\in(\mathbb{R}^+)^2$ avec $a\leq b$. On a $\sqrt{b}-\sqrt{a}=\frac{b-a}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}$ qui est positif comme quotient de nombres positifs. Autrement dit : $\sqrt{a}\leq\sqrt{b}$.
4. Soit $a>0$ et $h>-a$ non nul. On a :
   $$\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}=\frac{a+h-a}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}=\frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}$$
   Lorsque $h\to 0$ on a $\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\to 2\sqrt{a}$ et, comme $a\neq 0$, on a $\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}\to\frac{1}{2\sqrt{a}}$.
5. Il s'agit juste de bien comprendre qu'il s'agit de composées de fonctions. Par exemple : $(\ln(u))'=(\ln\circ u)=\ln'\circ u\times u'=\frac{u'}{u}$. Cette formule s'applique lorsque u est une fonction strictement positive et dérivable.
   On a aussi :$(\mathrm{e}^u)'=u'\mathrm{e}^u$(sans restriction pour u), $(\sqrt{u})'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ (u est une fonction strictement positive et dérivable), $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a\cos(ax+b)=-a\sin(ax+b)$.
6. $\cos(\arccos(\frac{1}{2}))=\frac{1}{2}$; $\arccos(\cos(\frac{5\pi}{4}))=\frac{3\pi}{4}$; $\arccos(\cos(-\frac{\pi}{6}))=\frac{\pi}{6}$.
7. On a, pour $(\alpha,\beta,\gamma)\in$
   $R^{+*}\times\mathbb{R}^2$, $\alpha^{\beta+\gamma}=\mathrm{e}^{(\beta+\gamma)\ln(\alpha)}=\mathrm{e}^{\beta\ln(\alpha)}\mathrm{e}^{\gamma\ln(\alpha)}=\alpha^{\beta+\gamma}=\alpha^\beta\alpha^\gamma$.
8. Soit $a>0$. $a^x=\mathrm{e}^{x\ln(a)}$ est défini pour tout $x\in\mathbb{R}$. C'est une composée de fonctions dérivables et on a, $\forall x\in\mathbb{R}$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^{x\ln(a)})=\ln(a)\mathrm{e}^{x\ln(a)}$ qui est du signe de $\ln(a)$.
   — <u>Si $0<a<1$</u> : $\ln(a)<0$ et donc $x\mapsto a^x$ est strictement décroissante. Ses limites se calculent par opérations et on a $\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=0$.

— Si $a = 1$: $\ln(a) = 0$ et la fonction est constante égale à 1.
— Si $a > 1 \ln(a) > 0$ et donc $x \mapsto a^x$ est strictement croissante. Ses limites se calculent par opérations et on a $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$.

9. Soit $b \in \mathbb{R}$. $x^b = e^{b \ln(x)}$ est défini pour tout $x > 0$. C'est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et, par opérations on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{d}{dx}(x^b) = x^b \times \frac{b}{x}$ qui est du signe de b.
— Si $b < 0$: $x \mapsto x^b$ est strictement décroissante. Ses limites se calculent par opérations et on a $\lim_{x \to 0^+} x^b = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} x^b = 0$.
— Si $b = 0$: la fonction est constante sur $\mathbb{R}^{+*}$ égale à 1.
— Si $b > 0$: $\ln(a) > 0$ et donc $x \mapsto x^b$ est strictement croissante. Ses limites se calculent par opérations et on a $\lim_{x \to 0^+} x^b = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} x^b = +\infty$.

Exercice n° 3

— $f(t) = \sqrt{t^2 - 3t + 2}$ est définie ssi $t^2 - 3t + 2 \geq 0 \Leftrightarrow (t-1)(t-2) \geq 0 \Leftrightarrow t \in]-\infty; 1] \cup [2; +\infty[$. Par opérations, on peut dériver f sur $]-\infty; 1[\cup]2; +\infty[$ et on a $f'(t) = \frac{2t-3}{t^2-3t+2}$.
Remarque : à ce stade, on ne sait pas si la fonction est dérivable ou non en 1 et en 2. On sait juste qu'on ne peut pas calculer la dérivée par opérations.

— $g(t) = \ln((2t-1)(t+7))$ est définie ssi $(2t-1)(t+7) > 0 \Leftrightarrow t \in]-\infty; -7[\cup]\frac{1}{2}; +\infty[$. Sur ce domaine, on peut dériver g par opérations et on a $g'(t) = \frac{4t+13}{(2t-1)(t+7)}$.

— $h(t) = t^2 \ln(t)$ est définie ssi $t \in \mathbb{R}^{+*}$. Sur ce domaine on peut dériver h par opérations et on a : $h'(t) = 2t \ln(t) + t$.

— $i(x) = (2x+1)^9$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynômiale. On la dérive en utilisant la formule pour le composées et on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $i'(x) = 9(2x+1)^8 \times 2 = 18(2x+1)^8$.

— $j(U) = \ln(U^3 - 5U - 4)$ est définie ssi $U^3 - 5U - 4 > 0$. C'est une inéquation polynômiale de degré 3, il faut factoriser $U^3 - 5U - 4$. On remarque que -1 est une racine évidente, on peut donc factoriser par $U+1$ et on trouve $U^3 - 5U - 4 = (U+1)(U^2 - U - 4)$. Les racines de $U^3 - 5U - 4$ sont donc -1, $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$ et $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$. À l'aide d'un tableau de signes, on voit que $U^3 - 5U - 4 > 0 \Leftrightarrow U \in]\frac{1-\sqrt{17}}{2}; -1[\cup]\frac{1+\sqrt{17}}{2}; +\infty[$.
Sur ce domaine, j est dérivable et on a $j'(U) = \frac{3U^2-5}{U^3-5U-4}$.

— $k(x) = (\tan(x))^2$ est définie ssi $\tan(x)$ existe, c'est-à-dire ssi $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[$.
Sur ce domaine, k est dérivable et on a : $k' = 2 \tan \times \tan' = \frac{2 \tan}{\cos^2}$.

2 Un peu plus dur

Exercice n° 4

On utilise les formules d'additions des arcs ($\cos(a+b) \ldots$), le fait que la composition de deux fonctions réciproques donne l'identité, ainsi que les formules : $\forall x \in [-1; 1]$, $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2} = \sin(\arccos(x))$. On a ainsi :

$$A = \sin(\arcsin(\frac{1}{3}))\cos(\arcsin(\frac{1}{4})) - \cos(\arcsin(\frac{1}{3}))\sin(\arcsin(\frac{1}{4})) = \frac{1}{3} \times \sqrt{\frac{15}{16}} - \sqrt{\frac{8}{9}} \times \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{8}}{12}$$

$$B = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{8}}{3} \times \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{1 - \sqrt{120}}{12}$$

Exercice n° 5

— (E_1) est définie pour $x \geq -1$. On veut appliquer la fonction $t \mapsto t^2$, on a deux possibilités : travailler par implication et faire une réciproque à la fin ou bien travailler par équivalences mais en veillant à ce que l'on utilise des intervalles sur lesquels il y a bijection. Optons pour la seconde approche : $t \mapsto t^2$ réalise des bijections $\mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, il faut donc qu'on veille à ce que les deux membres soient de même signe. $\forall x \in [-1; +\infty[,\ \sqrt{x+1} \geq 0$ et $3x - 7 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{7}{3}$. Pour $x \in [-1; \frac{7}{3}]$, l'équation n'est pas satisfaite car les deux membres sont de signes différents, pour $x \geq \frac{7}{3}$ on a :

$$\sqrt{x+1} = 3x - 7 \Leftrightarrow x + 1 = (3x-7)^2 \Leftrightarrow 9x^2 - 43x + 48 = 0 \Leftrightarrow x \in \{\frac{16}{9}; 3\} \Leftrightarrow x \in \{3\}$$

— $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x = \ln 2 \Leftrightarrow x = \ln(\ln(2))$.

— $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(5x - \frac{\pi}{5}) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 5x - \frac{\pi}{5} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ou $5x - \frac{\pi}{5} = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

$$\Leftrightarrow x \in \left\{\tfrac{13\pi}{15\times 5} + k\tfrac{2\pi}{5}\ ;\ -\tfrac{7\pi}{15\times 5} + k\tfrac{2\pi}{5}\ /\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

— $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos x = 0,4 \Leftrightarrow x \in \{\arccos(0,4) + 2k\pi\ ;\ -\arccos(0,4) + 2k\pi\ /\ k \in \mathbb{Z}\}$.

— (I_1) est définie sur $(]-\infty; -2[\cup]1; +\infty[) \cap]-5; +\infty[$ c'est-à-dire sur $]-5; -2[\cup]1; +\infty[$. On peut alors appliquer exp qui est une bijection strictement croissante et on a :

$$\ln(x^2 + x - 2) < \ln(x+5) \Leftrightarrow x^2 - 7 < 0 \Leftrightarrow x \in]-\sqrt{7}; \sqrt{7}[\Leftrightarrow x \in]-\sqrt{7}; -2[\cup]1; \sqrt{7}[.$$

— $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x - \dfrac{\pi}{5}) < 0 \ \Leftrightarrow\ x - \dfrac{\pi}{5} \in \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left]\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi; \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi\right[\ \Leftrightarrow\ x \in \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left]\dfrac{7\pi}{10} + 2k\pi; \dfrac{17\pi}{10} + 2k\pi\right[$.

Exercice n° 6

1. ch et sh sont définies sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(-x) = \mathrm{ch}(x)$ et $\mathrm{sh}(-x) = -\mathrm{sh}(x)$. On en déduit que ch est paire et sh est impaire.
Il suit qu'il suffit de les étudier sur $\mathbb{R}^+$ *(on pourrait tout aussi bien choisir $\mathbb{R}^-$).*

   ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$ en tant que combinaisons linéaires (et composées) de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. En appliquant les formules de dérivation on obtient : $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$ et $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$.
(La seule difficulté est de bien dériver e^{-x}).

   On a $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$ et il est clair que $\mathrm{ch} > 0$ *(voyez-vous bien pourquoi ?)* donc sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
La parité de sh nous permet de limiter son étude à $\mathbb{R}^+$ et on a uniquement la limite en $+\infty$ à déterminer. *(Voyez-vous pourquoi, sans calcul, on peut affirmer que sh $(0) = 0$?)* On a :

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0.$$

   On en déduit, par opérations sur les limites, que $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{sh}(x) = +\infty$. On dresse le tableau de variations de sh sur $\mathbb{R}^+$ et on le complète à $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
sh	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

   On a $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$. Or, le tableau de variations de sh nous donne son signe.

   On a $\mathrm{ch}(0) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty$ ce qui nous permet de construire le tableau de variations de ch sur $\mathbb{R}^+$ puis de le compléter à $\mathbb{R}$ (par parité) :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
sh		$-$	0	$+$	
ch	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

2. On a : $\forall x \in \mathbb{R},\ \text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = (\text{ch}(x) - \text{sh}(x))(\text{ch}(x) + \text{sh}(x)) = \text{e}^x\text{e}^{-x} = \text{e}^0 = 1$.

Exercice n° 7

1. (a) On a $(\frac{3}{5})^2 + (\frac{4}{5})^2 = 1$ donc il existe $\phi \in [0; 2\pi[$ tel que $\cos(\phi) = \frac{3}{5}$ et $\sin(\phi) = \frac{4}{5}$.
   (b) On a alors :
$$3\cos(t) + 4\sin(t) = 5(\frac{3}{5}\cos(t) + \frac{4}{5}\sin(t)) = \cos(t)\cos(\phi) + \sin(t)\sin(\phi) = 5\cos(t - \phi).$$
2. On a $5^2 + (-1)^2 = 26$ et $(\frac{5}{\sqrt{26}})^2 + (\frac{-1}{\sqrt{26}})^2 = 1$ donc il existe $\psi \in [0; 2\pi[$ tel que $\cos(\psi) = \frac{5}{\sqrt{26}}$ et $\sin(\psi) = \frac{-1}{\sqrt{26}}$. Ensuite :
$$5\cos(t) - \sin(t) = \sqrt{26} = \frac{5}{\sqrt{26}}\cos(t) + \frac{-1}{\sqrt{26}}\sin(t) = \sqrt{26}\cos(t - \psi)$$
3. Soit A et B deux réels qui ne sont pas tous les deux nuls. On a alors $A^2 + B^2 \neq 0$ et il existe $\theta \in [0; 2\pi[$ tel que $\cos(\theta) = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$ et $\sin(\theta) = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$.
   Il suit que : $A\cos(t) + B\sin(t) = \sqrt{A^2 + B^2}\cos(t - \theta)$.

Exercice n° 8

a) La fonction $f(x) = \arccos x + \arcsin x$ est définie et continue sur $[-1; 1]$, elle est dérivable sur $]-1; 1[$. On a :
$$\forall x \in]-1; 1[,\ f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$
donc f est constante sur l'intervalle $]-1; 1[$. Par continuité, elle est constante sur $[-1; 1]$.

b) On a $\forall x \in [-1; 1], f(x) = f(0) \iff \arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$.

Exercice n° 9

La fonction $f : x \mapsto \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x})$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$, de dérivée nulle. On en déduit qu'elle est constante sur les intervalles $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$. On a :
- $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ f(x) = f(1) \iff \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}^{-*},\ f(x) = f(-1) \iff \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = -\frac{\pi}{2}$.

3 Démontrer les résultats du cours

Exercice n° 10

La fonction sin étant dérivable sur $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ de dérivée non nulle sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, la fonction arcsin est dérivable sur $]-1; 1[$.
Pour $x \in]-1; 1[$, dérivons la relation $\sin(\arcsin(x)) = x$, on obtient $\cos(\arcsin(x))\arcsin'(x) = 1$. En remarquant que $\cos(\arcsin(x)) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \neq 0$ on déduit $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$. En dérivant la relation $\forall x \in \mathbb{R},\ \tan(\arctan(x)) = x$ on a : $\tan'(\arctan(x))\arctan'(x) = 1 \iff (1 + \tan^2(\arctan(x))\arctan'(x) = 1 \iff \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

4 Plus difficile...

Exercice n° 11

L'équation a du sens pour $x \in]-\infty;-3[\cup]0;+\infty[$. Pour x dans cet ensemble, posons $Z = \sqrt{x^2+3x}$. L'équation devient alors :

$$Z^2 - 7 + \frac{6}{Z} = 0 \iff Z^3 - 7Z + 6 = 0 \iff (Z-1)(Z-2)(Z+3) = 0 \iff Z \in \{1;2;-3\}$$

Comme $Z > 0$, on écarte -3 et on a :
- soit $Z = 1$ c'est-à-dire $\sqrt{x^2+3x} = 1 \iff x^2+3x-1 = 0 \iff x \in \{\frac{-3+\sqrt{13}}{2}; \frac{-3-\sqrt{13}}{2}\}$;
- soit $Z = 2$, c'est-à-dire $\sqrt{x^2+3x} = 2 \iff x^2+3x-4 = 0 \iff x \in \{1;-4\}$.

Les quatre valeurs trouvées sont dans l'ensemble $]-\infty;-3[\cup]0;+\infty[$, ce sont donc bien des solutions.

Exercice n° 12

On considère le polynôme $P(x) = 8x^3 - 6x - 1$.

a) P est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale.
On a : $\forall x \in \mathbb{R},\ P'(x) = 24x^2 - 6 = 6(2x-1)(2x+1)$.
On en déduit le signe de P' puis les variations de P :
- $P'(x) < 0 \iff x \in]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}[$ et donc P est strictement décroissante sur $]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}[$;
- $P'(x) > 0 \iff x \in \mathbb{R}\backslash]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}[$ et donc P est strictement croissante sur $]-\infty;-\frac{1}{2}[$ et sur $]\frac{1}{2};+\infty[$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
P	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

b) On applique le TVI sur $]-\infty;-\frac{1}{2}[$: la fonction est continue, strictement croissante de $]-\infty;-\frac{1}{2}[$ sur $]-\infty;3[$. $0 \in]-\infty;3[$ donc il existe un unique $x_1 \in]-\infty;-\frac{1}{2}[$ tel que $f(x_1) = 0$.
f est croissante sur $]-\infty;-\frac{1}{2}[$ et $f(-1) = -3$ donc $x_1 > -1$. De même, il existe un unique $x_2 \in]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}[$ et un unique $x_3 \in]\frac{1}{2};+\infty[$ tels que $f(x_2) = f(x_3) = 0$.
$f(1) = 1$ donc $x_3 < 1$.

c) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a :

$$\cos(3\theta) = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\theta}) = \mathrm{Re}\left((\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^3\right) = \cos(\theta)^3 - 3\cos(\theta)\sin^2(\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)$$

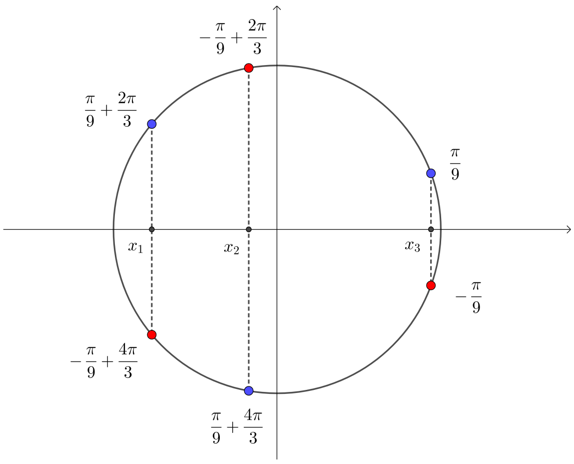
Il suit :

$$P(\cos(\theta)) = 0 \iff 8\cos(\theta)^3 - 6\cos(\theta) - 1 = 0 \iff 2\cos(3\theta) - 1 = 0$$

d) Puisque $-1 < x_1 < x_2 < x_3 < 1$, il existe des angles φ_1, φ_2 et φ_3 tels que $x_i = \cos(\varphi_i)$ pour $i \in \{1;2;3\}$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a :

$$P(\cos(\theta)) = 0 \iff \cos(3\theta) = \frac{1}{2} \iff \theta \in \left\{\frac{\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

À l'aide d'une figure, on voit que $x_1 = \cos(\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{3})$, $x_2 = \cos(\frac{\pi}{9} + \frac{4\pi}{3})$ et $x_3 = \cos(\frac{\pi}{9})$



Exercice n° 13

$2^x + 3^x$ signifie $\mathrm{e}^{x\ln(2)} + \mathrm{e}^{x\ln(3)}$, ce qui a du sens pour tout réel x.
Notons $f : x \mapsto 2^x + 3^x$. C'est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, sa dérivée vaut $f'(x) = \ln(2)\mathrm{e}^{x\ln(2)} + \ln(3)\mathrm{e}^{x\ln(3)} > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$. Comme f est continue et strictement croissante, on a :

$$f(\mathbb{R}) = f(]-\infty;+\infty[) =]\lim_{x\to-\infty} f(x); \lim_{x\to+\infty} f(x)[=]0;+\infty[\quad \text{(par opérations sur les limites)}$$

On en déduit que tout $k > 0$ admet un unique antécédent par f, autrement dit : l'équation $2^x + 3^x = k$ admet une unique solution.